פתרון מבחן מס' 25 (ספר לימוד – שאלון 035805)

20-05-2017

(1)

$$a_1 \;,\; a_2 \;,\; a_3 \;\Rightarrow\; a_1 \;,\; a_1q \;,\; a_1q^2$$

$$\frac{24}{a_1} \;,\; \frac{60}{a_2} \;,\; \frac{126}{a_3} \;\Rightarrow\; \frac{24}{a_1} \;,\; \frac{60}{a_1q} \;,\; \frac{126}{a_1q^2}$$

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = 38 \;\Rightarrow\; a_1(1+q+q^2) = 38$$

(א) לפי תכונה של סדרה חשבונית:

$$2\cdot\frac{60}{a_1q} = \frac{24}{a_1} + \frac{126}{a_1q^2} \quad /\cdot a_1q^2$$

$$120q = 24q^2 + 126 \;\Rightarrow\; 4q^2 - 20q + 21 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{20\pm 8}{8} \;\Rightarrow\; q_1 = \frac{28}{8} = 3.5 \;,\; q_2 = \frac{12}{8} = 1.5$$

הפתרון $q_1 = 3.5$ נפסל, כי נתון: $q < 2$.

$$q = \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; a_1\left(1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right) = 38 \;\Rightarrow\; a_1\cdot\frac{19}{4} = 38 \;\Rightarrow\; a_1 = 8$$

תשובה: $a_1 = 8 \;,\; a_2 = 12 \;,\; a_3 = 18$.

(ב) (*i*) שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית הם:

$$\frac{24}{a_1} = \frac{24}{8} = 3 \;,\; \frac{60}{12} = 5 \;,\; \frac{126}{18} = 7$$

הפרש הסדרה הוא:

$$d = 5 - 3 = 2$$

$$7 = A_1 + d(12-1) \;\Rightarrow\; 7 = A_1 + 2\cdot 11 \;\Rightarrow\; A_1 = -15$$

(*ii*)

$$a_n < 0 \;\Rightarrow\; A_1 + d(n-1) < 0 \;\Rightarrow\; -15 + 2(n-1) < 0$$

$$n - 1 < 7.5 \;\Rightarrow\; n < 8.5$$

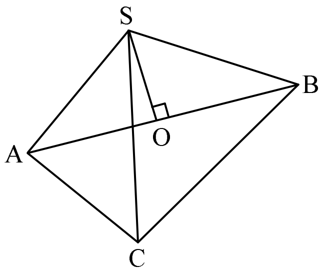
n הוא מספר טבעי, לכן $n \le 8$,

כלומר בסדרה יש 8 איברים שליליים.

(*iii*)

$$S = 0 \;\Rightarrow\; [2A_1 + d(n-1)]\frac{n}{2} = 0$$

$$-30 + 2(n-1) = 0 \;\Rightarrow\; n - 1 = 15 \;\Rightarrow\; n = 16$$



(2) (א) לפי משפט פיתגורס ב- ΔBSC :

$$BC^2 = SC^2 + SB^2$$

$$BC^2 = 6^2 + 6^2 = 72$$

$\measuredangle ASC = 60^\circ$, $AS = SC =$ 6 ס״מ ,

לכן ΔASC הוא משולש שווה-צלעות,

כלומר: $AC =$ 6 ס״מ .

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔASB :

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2 \cdot SA \cdot SB \cdot \cos \measuredangle S$$

$$AB^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = 108$$

בסך הכול, קיבלנו: $AB^2 = BC^2 + AC^2$ ($108 = 72 + 36$).

לפי משפט הפוך למשפט פיתגורס, ΔABC הוא משולש ישר-זווית ($\measuredangle C = 90^\circ$).

(ב) הפירמידה $SABC$ היא פירמידה ישרה, לכן עקב הגובה SO ,
הנקודה O , היא מרכז המעגל החוסם את משולש הבסיס ABC .
מרכז המעגל החוסם משולש ישר-זווית נמצא באמצע היתר,
מכאן ש- O היא אמצע AB .

$$AO = OB = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{108} = 3\sqrt{3} \text{ ס״מ}$$

הזווית בין המקצוע הצדדי לבסיס היא למשל $\measuredangle SAO$.

ב- ΔSAO : $\cos \measuredangle A = \frac{AO}{AS} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \measuredangle SAO = 30^\circ$

(ג) נמצא את גובה הפירמידה SO מתוך ΔASO :

$$\sin \measuredangle A = \frac{SO}{AS} \Rightarrow SO = AS \cdot \sin 30^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ ס״מ}$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{AC \cdot CB}{2} \cdot SO =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{36} \cdot \sqrt{72}}{2} \cdot 3 = 18\sqrt{2} \text{ סמ״ק}$$

(3) **(א)**

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=0 \;\Rightarrow\; 1-a+2b=0$$

$$f(1)=0 \;\Rightarrow\; 2-a+b=0$$

$$-\begin{cases} a-2b=1 \\ a-b=2 \end{cases} \;\Rightarrow\; -b=-1 \;\Rightarrow\; b=1 \;\Rightarrow\; a=3$$

מכאן: $f(x)=2x-3+\frac{1}{x}$.

(ב)

$$g'(x)=f(x) \;\Rightarrow\; g'(x)=2x-3+\tfrac{1}{x}\;,\; x\neq 0$$

(*i*)

$$g'(x)=0 \;\Rightarrow\; 2x-3+\tfrac{1}{x}=0 \;\Rightarrow\; 2x^2-3x+1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm 1}{4} \;\Rightarrow\; x_1=1\;,\; x_2=\tfrac{1}{2}$$

x	$x<\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<1$	$x=1$	$x>1$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	max	↘	min	↗

$$g'\left(\tfrac{1}{4}\right)=\tfrac{1}{2}-3+4>0 \quad , \quad g'\left(\tfrac{3}{4}\right)=\tfrac{3}{2}-3+\tfrac{4}{3}<0$$

$$g'(2)=4-3+\tfrac{1}{2}>0$$

$x_{min}=1\;,\; x_{max}=\frac{1}{2}$.

(*ii*) הפונקציה $g(x)$ עולה עבור $0<x<\frac{1}{2}$, $x>1$

ויורדת עבור: $\frac{1}{2}<x<1$.

(ג) (*i*)

$$g(x)=\int g'(x)\,dx=\int\left(2x-3+\tfrac{1}{x}\right)dx=$$

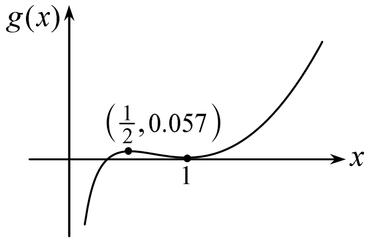
$$=x^2-3x+\ln|x|+C$$

$$g(1)=0 \;\Rightarrow\; 1-3+0+C=0 \;\Rightarrow\; C=2$$

נתון כי $x>0$, לכן $|x|=x$ ומכאן:

$$g(x)=x^2-3x+\ln x+2$$

המשך בעמוד הבא ▶▶▶



(ii) ראו סרטוט משמאל.

$$g\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{2} + 2 + \ln\tfrac{1}{2} \approx 0.057$$

ונתון: $g(1) = 0$.

(iii) $S = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right) dx = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} g'(x)\, dx = -g(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} =$

$= g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(1\right) = 0.057 - 0 =$ 0.057 יחידות שטח

(4) (א) הנקודות D ו- I הן נקודות הקיצון של גרף א׳
ובנקודות המתאימות להן (בעלות אותו שיעור ה- x) בגרף ב׳ (E ו- H)
שיעור ה- y שווה ל- 0 .
אבל, כאשר גרף א׳ עולה (מ- A ל- D ומ- I עד J),
גרף ב׳ הוא שלילי, לכן לא ייתכן שגרף א׳ מייצג פונקציה
וגרף ב׳ מייצג את נגזרת אותה הפונקציה.
לנקודות הקיצון של גרף ב׳ (C ו- F) מתאימות נקודות אפס של
גרף א׳ (B ו- G), לתחומי העלייה של גרף ב׳ (מ- C עד F) מתאים
תחום החיוביות של גרף א׳ (מ- B עד G) ולירידה של גרף ב׳
(מ- O ל- C , מ- F ל- K) מתאים תחום השליליות של גרף א׳
(מ- A ל- B , מ- G ל- J) .
לכן: $f(x)$ – גרף ב׳, $f'(x)$ – גרף א׳.

(ב) (i) $\int_{0}^{x} (-4\sin 2x)\, dx = 2\cos 2x\Big|_{0}^{x} = 2(\cos 2x - \cos 0) =$

$$= 2(\cos 2x - 1) = 2(1 - 2\sin^2 x - 1) = -4\sin^2 x$$

ולכן: $f(x) = -4\sin 2x$.

(ii) C ו- F הן נקודות הקיצון של $f(x)$.

$$f'(x) = (-4\sin 2x)' = -8\cos 2x$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -8\cos 2x = 0 \;\Rightarrow\; \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow\; 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\ ,\ n \in \mathbb{Z}$$

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

כלומר: $x_C = \frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; y_C = -4\sin\frac{\pi}{2} = -4 \;\Rightarrow\; C\left(\frac{\pi}{4},-4\right)$

$x_F = \frac{3\pi}{4} \;\Rightarrow\; y_F = -4\sin\frac{3\pi}{2} = 4 \;\Rightarrow\; F\left(\frac{3\pi}{4},4\right)$

K היא נקודת הקצה של הפונקציה $f(x)$ ($x = \frac{5\pi}{4}$), לכן:

$x = \frac{5\pi}{4} \;\Rightarrow\; y = f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{5\pi}{2} = -4 \;\Rightarrow\; K\left(\frac{5\pi}{4},-4\right)$

I היא נקודת המינימום של הפונקציה $f'(x)$.

$f''(x) = (-8\cos 2x)' = 16\sin 2x$

$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; 16\sin 2x = 0 \;\Rightarrow\; \sin 2x = 0$

$2x = \pi n \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi n}{2}\;,\; n \in \mathbb{Z}$

$x_I = \pi \;\Rightarrow\; y_I = f'(\pi) = -8\cos 2\pi = -8 \;\Rightarrow\; I(\pi,-8)$

(iii) נמצא את שיעורי ה- x של הנקודות B ו- G.

בנקודות אלה הנגזרת שווה ל- 0 ($f'(x) = 0$), כלומר נקודות אלה מתאימות לנקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$:

$x_G = x_F = \frac{3\pi}{4} \quad , \quad x_B = x_C = \frac{\pi}{4}$

$$S_{\text{אפור}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f'(x)\,dx = f(x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$= y_F - y_C = 4 + 4 =$ 8 יחידות שטח

(iv) השטח המקווקו נמצא מתחת לציר ה- x, לכן:

$$S_{\text{מקווקו}} = -\int_{x_H = x_I}^{\frac{5\pi}{4}} f(x)\,dx = -\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} f(x)\,dx = -(-4\sin^2 x)\Big|_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

$$= 4\sin^2 x\Big|_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} = 4\left(\sin^2\frac{5\pi}{4} - \sin^2\pi\right) =$$

$= 4\left(\frac{1}{2} - 0\right) =$ 2 יחידות שטח

(5) (א) נתון בגרף כי $f'(2)=0$.

$$f'(x)=\frac{e^{x-2}(x-\mathrm{c})-e^{x-2}}{(x-\mathrm{c})^2}=\frac{e^{x-2}(x-\mathrm{c}-1)}{(x-\mathrm{c})^2}$$

$$f'(2)=\frac{1\cdot(2-\mathrm{c}-1)}{(2-\mathrm{c})^2}=0 \;\Rightarrow\; 1-\mathrm{c}=0 \;\Rightarrow\; \mathrm{c}=1$$

כלומר: $f(x)=\frac{e^{x-2}}{x-1}$.

(ב) תחום הגדרה: $x\neq 1$.

(ג) נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ היא בנקודה $x=2$ ($f'(2)=0$).
פונקציית הנגזרת מחליפה סימן בנקודה זו ממינוס לפלוס, כלומר
משמאל לנקודה $x=2$ הפונקציה $f(x)$ יורדת, ואחרי הנקודה $x=2$
הפונקציה $f(x)$ עולה, כלומר בנקודה $x=2$ יש לפונקציה $f(x)$
נקודת מינימום.

$$f(2)=\frac{e^0}{2-1}=\frac{1}{1}=1 \;\Rightarrow\; \min(2,1)$$

(ד) קבענו שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון יחידה בנקודה שבה $x=2$,
והנקודה $(2,1)$ היא נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$,
לכן הגרפים II ו- IV אינם מתאימים, כי בגרפים אלו יש נקודת מקסימום.
נמצא את שיעור ה- y של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם ציר ה- y : $x=0 \;\Rightarrow\; f(0)=\frac{e^{0-2}}{0-1}=-\frac{1}{e^2}<0$

לכן גרף I לא מתאים.
הגרף המתאים לפונקציה $f(x)$ הוא **גרף III** .

(ה)

$$\frac{e^{x-2}}{x-1}=\frac{1}{e}$$

$$0<\frac{1}{e}<1 \;\Rightarrow\; 0<\frac{1}{e}<y_{\min}$$

לכן הישר $y=\frac{1}{e}$ אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ (גרף III),
כלומר למשוואה הנתונה אין פתרון.

(ו)

$$S=\int_2^3 f'(x)\,dx=f(x)\Big|_2^3=f(3)-f(2)=$$

$$=\frac{e^{3-2}}{3-1}-\frac{e^{2-2}}{2-1}=\left(\frac{e}{2}-1\right)$$ יחידות שטח