פתרון מבחן מס' 24 (ספר לימוד – שאלון 035805)

(1) נתון: $a_{n+1}=3\cdot a_n$, מכאן: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3=\text{const}$.

כלומר, הסדרה $\{a_n\}$ היא סדרה הנדסית שמנתה $q=3$.

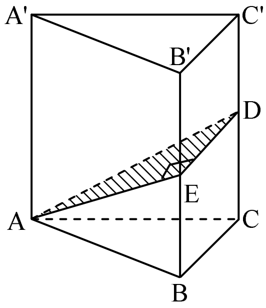
(א)
$$b_n=a_n+3a_{n+1}=a_n+3(a_n\cdot 3)=10a_n$$
$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{10a_{n+1}}{10a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}=3=\text{const}$$

כלומר, הסדרה $\{b_n\}$ היא סדרה הנדסית שמנתה $q=3$.

(ב)
$$a_1=2\ \Rightarrow\ a_2=a_1\cdot q=2\cdot 3=6$$
$$b_1=a_1+3\cdot a_2=2+3\cdot 6=20$$
$$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n=S_n^{\{b\}}=b_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=20\cdot\frac{3^n-1}{3-1}=10(3^n-1)$$

(ג)
$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}=2\cdot\frac{3^n}{3}=\frac{2}{3}\cdot 3^n$$
$$15(a_{n+1}-a_n)=15(3a_n-a_n)=15\cdot 2a_n=$$
$$=30a_n=30\cdot\frac{2}{3}\cdot 3^n=20\cdot 3^n$$
$$2S_n+20=2\cdot 10\cdot(3^n-1)+20=20\cdot 3^n-20+20=20\cdot 3^n$$

מכאן נובע: $15(a_{n+1}-a_n)=2S_n+20$.



(2) (א) $H = BB' = BE + EB'$

ב- ΔAED : $AE = \frac{a}{\tan 30^\circ} = a\sqrt{3}$ יחידות אורך

$AD = \frac{a}{\sin 30^\circ} = 2a$ יחידות אורך

לפי משפט פיתגורס ב- ΔABE :

$$AB^2 + BE^2 = AE^2 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad AB = BE = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ יחידות אורך

$AC = AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ יחידות אורך

לפי משפט פיתגורס ב- ΔADC :

$DC = \sqrt{4a^2 - \frac{3a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$ יחידות אורך $= EB'$

$$H = BB' = BE + EB' = \frac{a\sqrt{6}}{2} + \frac{a\sqrt{10}}{2} =$$

$= \frac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \approx 2.806a$ יחידות אורך

(ב)

$$V = S_{\Delta ABC} \cdot BB'$$

$$1.484a^3 = \frac{AB \cdot AC}{2} \sin\measuredangle A \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$$

$$1.484a^3 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\measuredangle A \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$$

$$1.484a^3 = 2.1044a^3 \cdot \sin\measuredangle A$$

$$\sin\measuredangle A = 0.70519 \quad \Rightarrow \quad \measuredangle A \approx 44.84^\circ$$

(3) (א) חומר א׳:

$$0.8M_0 = M_0 q_1^{\,8} \;\Rightarrow\; q_1^{\,8} = 0.8 \;\Rightarrow\; q_1 = \sqrt[8]{0.8} = 0.9724925$$

חומר ב׳:

$$0.5M_0 = M_0 q_2^{\,20} \;\Rightarrow\; q_2^{\,20} = 0.5 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; q_2 = \sqrt[20]{0.5} = 0.9659363$$

(i)

$$0.5M_0 = M_0 q_1^{\,T_1} \;\Rightarrow\; q_1^{\,T_1} = 0.5$$

$$T_1 = \frac{\ln 0.5}{\ln q_1} = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.9724925} \;\Rightarrow\; T_1 = 24.85 \text{ שנים}$$

(ii)

$$t_2 = T_1 = 24.85$$

$$M_{t_2} = M_0 \cdot q_2^{\,t_2}$$

$$\frac{M_{t_2}}{M_0} = q_2^{\,t_2} = 0.9659363^{24.85} = 0.4226393$$

משקל חומר ב׳ אחרי 24.85 שנים מהווה 42.26%

ממשקלו ההתחלתי, כלומר חומר ב׳ מאבד

$100\% - 42.26\% = 57.74\%$ ממשקלו ההתחלתי.

(ב) *(i)*

$$f'(x) = -2 + \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2}{(x-2)^2} = 2 \;\Rightarrow\; (x-2)^2 = 1$$

$$x - 2 = \pm 1 \;\Rightarrow\; x_1 = 1 \;,\; x_2 = 3$$

הפתרון $x_1 = 1$ לא מתאים, כי נתון ש- $x > 2$.

$$x_2 = 3 \;\Rightarrow\; y_2 = 5 - 6 - \frac{2}{3-2} = -3 \;\Rightarrow\; (3,-3)$$

$$f''(x) = -\frac{4}{(x-2)^3} \;\Rightarrow\; f''(3) = -\frac{4}{1^3} < 0 \;\Rightarrow\; \max$$

(ii) משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת הקיצון היא מהצורה $y = y_{\text{קיצון}}$, כלומר $y = -3$, לכן:

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$S=\int_{2.5}^{4}\left[-3-\left(5-2x-\tfrac{2}{x-2}\right)\right]dx=\int_{2.5}^{4}\left(2x-8+\tfrac{2}{x-2}\right)dx=$$

$$=(x^2-8x+2\ln|x-2|)\Big|_{2.5}^{4}=$$

$$=16-32+2\ln 2-(6.25-20+2\ln 0.5)=$$

$$=2\ln 2-16+13.75+2\ln 2=$$

$=4\ln 2-2.25\approx 0.5226$ יחידות שטח

(4) (א) תחום הגדרה: $f(x)\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq -3\,,\,5$

(ב)

$$g'(x)=\left(e^{\frac{1}{f(x)}}\right)'=e^{\frac{1}{f(x)}}\cdot\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=$$

$$=e^{\frac{1}{f(x)}}\cdot\left(-\frac{1}{[f(x)]^2}\right)\cdot f'(x)=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}\cdot e^{\frac{1}{f(x)}}$$

(ג) $e^{\frac{1}{f(x)}}>0$ לכל x בתחום ההגדרה, $[f(x)]^2>0$ לכל x בתחום ההגדרה, לכן הסימן של פונקציית הנגזרת $g'(x)$ מוגדר רק על-ידי סימן הביטוי $-f'(x)$.

הפונקציה $g(x)$ עולה כאשר $g'(x)>0$, כלומר:

$$-f'(x)>0 \;\Rightarrow\; f'(x)<0$$

כלומר כאשר הפונקציה $f(x)$ יורדת, וזה קורה בתחום $x<1$.

הפונקציה $g(x)$ עולה עבור $-3<x<1$, $x<-3$.

הפונקציה $g(x)$ יורדת כאשר $g'(x)<0$, כלומר:

$$-f'(x)<0 \;\Rightarrow\; f'(x)>0$$

כלומר כאשר הפונקציה $f(x)$ עולה, וזה קורה בתחום $x>1$.

הפונקציה $g(x)$ יורדת עבור $1<x<5$, $x>5$.

המשך בעמוד הבא >>>

לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון כאשר:

$$g'(x)=0 \;\Rightarrow\; -f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x=1$$

$$y=e^{\frac{1}{f(1)}}=e^{\frac{1}{-8}} \;\Rightarrow\; \left(1,e^{\frac{1}{-8}}\right)$$

נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$: $(1,0.882)$

(עד נקודה זו הפונקציה $g(x)$ עולה,

אחרי נקודה זו הפונקציה $g(x)$ יורדת).

(5) (א) (i)

$$f(-x)=\cos(-2x)+2\cdot(-x)\cdot\sin(-2x)=$$
$$=\cos 2x-2x\cdot(-\sin 2x)=$$
$$=\cos 2x+2x\sin 2x=f(x)$$

אם לכל ערך של x מתחום ההגדרה מתקיים: $f(-x)=f(x)$,

אזי הפונקציה היא זוגית.

(ii)

$$f'(x)=-2\sin 2x+2\sin 2x+2x\cdot 2\cos 2x=4x\cos 2x$$
$$f'(-x)=4\cdot(-x)\cdot\cos(-2x)=-4\cos 2x=-f'(x)$$

אם לכל ערך של x מתחום ההגדרה מתקיים:

$f'(-x)=-f'(x)$, אזי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא אי-זוגית.

(iii)

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 4x\cos 2x=0$$
$$x_1=0$$
$$\cos 2x=0 \;\Rightarrow\; 2x=\frac{\pi}{2}+\pi \mathrm{n} \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi \mathrm{n}}{2}\ ,\ \mathrm{n}\in\mathbb{Z}$$

בתחום נמצאים הפתרונות הבאים של המשוואה $f'(x)=0$:

$$x_1=0\ ,\ x_2=-\frac{5\pi}{4}\ ,\ x_3=-\frac{3\pi}{4}\ ,\ x_4=-\frac{\pi}{4}\ ,\ x_5=\frac{\pi}{4}\ ,$$
$$x_6=\frac{3\pi}{4}\ ,\ x_7=\frac{5\pi}{4}$$

המשך בעמוד הבא >>>

x	$0<x<\frac{\pi}{4}$	$x=\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$	$x=\frac{3\pi}{4}$
$f'(x)$	+	0	−	0
$f(x)$	↗	max	↘	min

x	$\frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$	$x=\frac{5\pi}{4}$
$f'(x)$	+	0
$f(x)$	↗	max

כיוון שהפונקציה $f'(x)$ היא אי-זוגית, אפשר לבדוק רק נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה רק עבור התחום $x>0$, ולתחום $x<0$ להשתמש באי-הזוגיות של פונקציית הנגזרת.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\pi<0 \qquad f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=4\cdot\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{4}>0$$

$$f(0)=1 \qquad f'(\pi)=4\pi\cdot\cos2\pi>0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\cdot\sin\frac{3\pi}{2}=-\frac{3\pi}{2}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\cos\frac{5\pi}{2}+\frac{5\pi}{2}\cdot\sin\frac{5\pi}{2}=\frac{5\pi}{2}$$

לפי הזוגיות של הפונקציה $f(x)$ נקבל:

$\left(-1.25\pi,\frac{5\pi}{2}\right)$ מקסימום מוחלט קצה,

$\left(-0.75\pi,-\frac{3\pi}{2}\right)$ מינימום, $\left(-0.25\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ מקסימום,

$(0,1)$ מינימום, $\left(0.25\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ מקסימום,

$\left(0.75\pi,-\frac{3\pi}{2}\right)$ מינימום, $\left(1.25\pi,\frac{5\pi}{2}\right)$ מקסימום מוחלט קצה.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(iv) $f'(x)>0$ עבור :

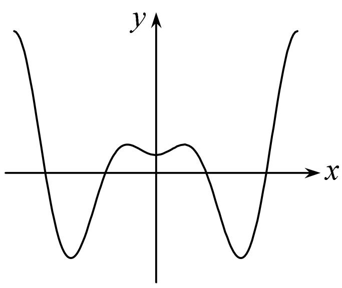
$$-\frac{3\pi}{4}<x<-\frac{\pi}{4}\ ,\ 0<x<\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$$

$f'(x)<0$ עבור :

$$-\frac{5\pi}{4}<x<-\frac{3\pi}{4}\ ,\ -\frac{\pi}{4}<x<0\ ,\ \frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$$

(ב) ראו סרטוט למטה.

(ג) $$\int_{0.25\pi}^{0.75\pi} f'(x)\,dx = f(x)\Big|_{0.25\pi}^{0.75\pi} = f\left(\frac{3\pi}{4}\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-2\pi$$



גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929