פתרון מבחן מס' 23 (ספר לימוד – שאלון 035805)

20-05-2017

(1) (א) סדרת המקומות של סדרה ① מהווה סדרה חשבונית:

$1 \; , \; 4 \; , \; 7 \; , \; 10 \; , \; \ldots \; , \; 34$

$34 = 1 + 3(n_1 - 1) \;\Rightarrow\; \;\Rightarrow\; 3(n_1 - 1) = 33 \;\Rightarrow\; n_1 = 12$

סדרת המקומות של סדרה ② מהווה סדרה חשבונית:

$2 \; , \; 5 \; , \; 8 \; , \; 11 \; , \; \ldots \; , \; 35$

$35 = 2 + 3(n_2 - 1) \;\Rightarrow\; 3(n_2 - 1) = 33 \;\Rightarrow\; n_2 = 12$

(ב) $\frac{P}{Q} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a_1 + a_3 + a_7 + \ldots + a_{34}}{a_1 \cdot q + a_3 \cdot q + a_7 \cdot q + \ldots + a_{34} \cdot q} = \frac{a_1 + a_3 + a_7 + \ldots + a_{34}}{q(a_1 + a_3 + a_7 + \ldots + a_{34})}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \;\Rightarrow\; q = \sqrt[3]{2}$$

(ג) $a_1 = 4 \;\Rightarrow\; P = a_1 \cdot \frac{(q^3)^{12} - 1}{q^3 - 1} = 4 \cdot \frac{2^{12} - 1}{2 - 1} = 16{,}380$

(ד) סדרת המקומות מהווה סדרה חשבונית: $7 \; , \; 13 \; , \; 19 \; , \; \ldots \; , \; 49$

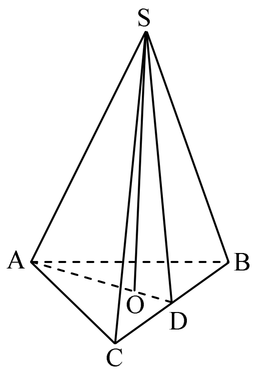
$d = 13 - 7 = 6 \;\Rightarrow\; 49 = 7 + 6(n - 1)$

$6(n - 1) = 42 \;\Rightarrow\; n - 1 = 7 \;\Rightarrow\; n = 8$

הסדרה הנתונה היא סדרה הנדסית שבה: $A_1 = a_7 = a_1 \cdot q^6 = 4 \cdot (\sqrt[3]{2})^6$

$A_1 = 4 \cdot 4 = 16 \; , \; Q = q^6 = (\sqrt[3]{2})^6 = 4 \; , \; N = 8$

$S_8 = 16 \cdot \frac{4^8 - 1}{4 - 1} = 349{,}520$



(2) (א) במשולש שווה-שוקיים SCB ‏($SC = SB$),
התיכון לבסיס SD הוא גם גובה לבסיס,
לכן:

$$M = 3 \cdot S_{\Delta SBC} = 3 \cdot \frac{BC \cdot SD}{2}$$

$$45 = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot SD \quad \Rightarrow \quad SD = 10 \text{ ס"מ}$$

(ב) במשולש שווה-צלעות ABC, הנקודה O היא מרכז המעגל החוסם את המשולש, כלומר נקודת חיתוך האנכים האמצעיים לצלעות המשולש.
כיוון שהמשולש הוא שווה-צלעות, אז הנקודה O היא גם נקודת חיתוך התיכונים במשולש, ו- $OD = \frac{1}{3} \cdot AD$.

לפי משפט פיתגורס ב- ΔADC:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$3^2 = AD^2 + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad AD = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ ס"מ}$$

$$OD = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ס"מ}$$

לפי משפט פיתגורס ב- ΔSOD:

$$SO^2 + OD^2 = SD^2 \quad \Rightarrow \quad SO^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 10^2$$

$$SO = \sqrt{100 - \tfrac{3}{4}} = \sqrt{99.25} \approx 9.96 \text{ ס"מ}$$

(ג) OD הוא ההיטל של SD על המישור ABC, לכן הזווית המבוקשת היא $\measuredangle SDO$. ב- ΔSDO:

$$\sin \measuredangle D = \frac{SO}{SD} = \frac{\sqrt{99.25}}{10}$$

$$\measuredangle SDO = 85.03^\circ$$

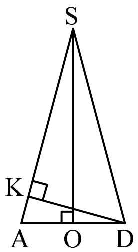
(ד)

$$AO = \frac{2}{3} \cdot AD \quad \Rightarrow \quad AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ ס"מ}$$

AO הוא ההיטל של AS על המישור ABC, לכן הזווית המבוקשת היא $\measuredangle SAO$. במשולש ΔSAO:

$$\tan \measuredangle A = \frac{SO}{AO} = \frac{\sqrt{99.25}}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle SAO \approx 80.14^\circ$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄



(ה) נתבונן ב- ΔASD . יש למצוא

את אורך האנך מנקודה D ל- AS (DK).

ב- ΔASO , לפי משפט פיתגורס :

$$AS^2 = AO^2 + OS^2 = (\sqrt{3})^2 + 99.25$$

$AS = \sqrt{102.25} \approx 10.11$ ס"מ

לפי נוסחת שטח משולש ASD :

$$S = \frac{AD \cdot SO}{2} \ , \ S = \frac{AS \cdot DK}{2}$$

$$\frac{AD \cdot SO}{2} = \frac{AS \cdot DK}{2} \ \Rightarrow \ AD \cdot SO = AS \cdot DK \ \Rightarrow \ DK = \frac{AD \cdot SO}{AS}$$

$DK = \dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{99.25}}{\sqrt{102.25}} \approx 2.56$ ס"מ

(3) (א) $f'(x) = 1 \cdot \sqrt[3]{x} + \dfrac{x-a}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad , \quad f'(1) = 1 + \dfrac{1-a}{3}$

$$1 + \frac{1-a}{3} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{1-a}{3} = -1 \ \Rightarrow \ 1-a = -3 \ \Rightarrow \ a = 4$$

(ב) $f'(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{x-4}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad , \quad f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x}$

(i) תחום הגדרה : כל x .

(ii) $f'(x) = 0 \ \Rightarrow \ \sqrt[3]{x} + \dfrac{x-4}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \quad / \cdot 3\sqrt[3]{x^2}$

$$3x + x - 4 = 0 \ \Rightarrow \ x = 1$$

$$f(1) = (1-4) \cdot 1 = -3 \ \Rightarrow \ (1,-3)$$

x	x < 1	x = 1	x > 1
f′(x)	−	0	+
f(x)	↘	min	↗

$$f'\left(\tfrac{1}{27}\right) = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{27} - 4}{3 \cdot \frac{1}{9}} < 0 \quad , \quad f'(27) = 3 + \frac{27-4}{+} > 0$$

תשובה: $\min(1,-3)$.

המשך בעמוד הבא ▶▶▶

(*iii*) הפונקציה עולה ($f'(x) > 0$) עבור $x > 1$,
הפונקציה יורדת ($f'(x) < 0$) עבור $x < 1$.

(*iv*) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

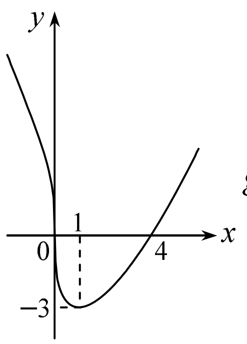
$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-4)\sqrt[3]{x} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_1 = 4 \ , \ x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (4,0) \ , \ (0,0)$$

תשובה: נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים:

$$(4,0) \ , \ (0,0)$$

(ג) ראו סרטוט משמאל.



(ד) (*i*) נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$
קיימת כאשר:

$$g'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0\,,4$$

$x = 0$ אינה נקודה פנימית של $g(x)$,
ו- $x = 4$ מינימום של הפונקציה $g(x)$
מכיוון שעבור $0 < x < 4$ הנגזרת שלילית,
כלומר הפונקציה יורדת, ועבור $x > 4$ הנגזרת חיובית,
כלומר הפונקציה עולה.

(*ii*) הפונקציה $g(x)$ עולה עבור: $g'(x) = f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 4$

הפונקציה $g(x)$ יורדת עבור:

$$g'(x) = f(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x < 4$$ ($x = 0$ נקודת קצה)

(*iii*)

$$\mathrm{m} = g'(8) = f(8) = (8-4)\sqrt[3]{8} = 4 \cdot 2 = 8$$

(4) (א) נמצא את נקודות החיתוך של כל אחד מהגרפים עם ציר ה- y :

$$g(0) = -e^2 - 1 \quad , \quad f(0) = -e^{-1} - 1$$

$-e^2 - 1 < -e^{-1} - 1$, לכן גרף I מתאים ל- $g(x)$
וגרף II מתאים ל- $f(x)$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ב) נמצא את שיעורי נקודת החיתוך בין הגרפים:

$$f(x)=g(x) \;\Rightarrow\; -e^{-1-x}-1=-e^{2x+2}-1$$
$$e^{-1-x}=e^{2x+2} \;\Rightarrow\; -1-x=2x+2 \;\Rightarrow\; x=-1$$
$$y=-e^{0}-1=-2 \;\Rightarrow\; (-1,-2)$$

נמצא משוואות המשיקים לגרפים של שתי הפונקציות.

נמצא את שיפועי המשיקים:

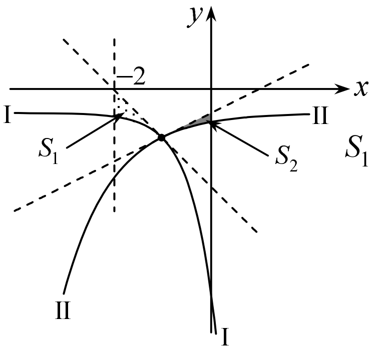
$f(x)$ (גרף II):
$$f'(x)=e^{-1-x} \;\Rightarrow\; f'(-1)=1 \;\Rightarrow\; \mathrm{m}_1=1$$

$g(x)$ (גרף I):
$$g'(x)=-2e^{2x+2} \;\Rightarrow\; g'(-1)=-2 \;\Rightarrow\; \mathrm{m}_2=-2$$

משוואות המשיקים הם:

$$f(x)\;:\;\; y+2=1\cdot(x+1) \;\Rightarrow\; y=x-1$$
$$g(x)\;:\;\; y+2=-2(x+1) \;\Rightarrow\; y=-2x-4$$

נסמן את השטחים המבוקשים:



(i)
$$S_1=\int_{-2}^{-1}(-2x-4+e^{2x+2}+1)\,dx=$$
$$=(-x^2-3x+\tfrac{1}{2}e^{2x+2})\Big|_{-2}^{-1}=$$
$$=-1+3+\tfrac{1}{2}-\left(-4+6+\tfrac{1}{2e^2}\right)=$$
$$=2.5-2-\frac{1}{2e^2}=$$
$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}\right)$ יחידות שטח

(ii)
$$S_2=\int_{-1}^{0}(x-1+e^{-1-x}+1)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-e^{-1-x}\right)\Big|_{-1}^{0}=$$
$=0-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)$ יחידות שטח

(5) (א)

$f(0)=0 \Rightarrow 2-a\cos 0-b\sin 0=0$

$2-a-0=0 \Rightarrow a=2$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Rightarrow 2-2\cos\pi-b\sin\frac{\pi}{2}=0$

$2+2-b=0 \Rightarrow b=4$

(ב)

$f(x)=2-2\cos 2x-4\sin x$

$f'(x)=4\sin 2x-4\cos x=4(2\sin x\cos x-\cos x)=$

$=4\cos x(2\sin x-1)$

(i)

$f'(x)=0 \Rightarrow 4\cos x(2\sin x-1)=0$

$\cos x=0 \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n \ , \ n\in\mathbb{Z}$

$\sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow x_2=\frac{\pi}{6}+2\pi k \ , \ x_3=\frac{5\pi}{6}+2\pi t \ , \ k,t\in\mathbb{Z}$

בתחום הנתון:

$x_1 : x=\frac{\pi}{2} \ , \ x=\frac{3\pi}{2} \quad , \quad x_2 : x=\frac{\pi}{6} \quad , \quad x_3 : x=\frac{5\pi}{6}$

x	$0<x<\frac{\pi}{6}$	$x=\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$	$x=\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{6}$
f′(x)	−	0	+	0	−
f(x)	↘	min	↗	max	↘

x	$x=\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}<x<\frac{3\pi}{2}$	$x=\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$
f′(x)	0	+	0	−
f(x)	min	↗	max	↘

$f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=4\cos\frac{\pi}{12}\left(2\sin\frac{\pi}{12}-1\right)<0$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\frac{\pi}{3}\left(2\sin\frac{\pi}{3}-1\right)>0$

$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=4\cos\frac{3\pi}{4}\left(2\sin\frac{3\pi}{4}-1\right)<0$

$f'(\pi)=4\cos\pi\left(2\sin\pi-1\right)>0$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$f'\left(\tfrac{7\pi}{4}\right)=4\cos\tfrac{7\pi}{4}\left(2\sin\tfrac{7\pi}{4}-1\right)<0$$

$$f(0)=0 \;\;\Rightarrow\;\; (0,0)$$

$$f\left(\tfrac{\pi}{6}\right)=2-2\cos\tfrac{\pi}{3}-4\sin\tfrac{\pi}{6}=2-1-2=-1 \;\;\Rightarrow\;\; \left(\tfrac{\pi}{6},-1\right)$$

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=2-2\cos\pi-4\sin\tfrac{\pi}{2}=2+2-4=0 \;\;\Rightarrow\;\; \left(\tfrac{\pi}{2},0\right)$$

$$f\left(\tfrac{5\pi}{6}\right)=2-2\cos\tfrac{5\pi}{3}-4\sin\tfrac{5\pi}{6}=2-1-2=-1 \;\;\Rightarrow\;\; \left(\tfrac{5\pi}{6},-1\right)$$

$$f\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)=2-2\cos3\pi-4\sin\tfrac{3\pi}{2}=2+2+4=8 \;\;\Rightarrow\;\; \left(\tfrac{3\pi}{2},8\right)$$

$$f\left(2\pi\right)=0 \;\;\Rightarrow\;\; \left(2\pi,0\right)$$

תשובה: $(0,0)$ מקסימום ; $\left(\tfrac{\pi}{6},-1\right)$ מינימום ;
$\left(\tfrac{\pi}{2},0\right)$ מקסימום ; $\left(\tfrac{5\pi}{6},-1\right)$ מינימום ;
$\left(\tfrac{3\pi}{2},8\right)$ מקסימום ; $\left(2\pi,0\right)$ מינימום.

(*ii*) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$$x=0 \;\;\Rightarrow\;\; y=0 \;\;\Rightarrow\;\; (0,0)$$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$y=0 \;\;\Rightarrow\;\; 2-2\cos2x-4\sin x=0 \quad /:2$$

$$1-\cos2x-2\sin x=0 \;\;\Rightarrow\;\; 2\sin^2 x-2\sin x=0$$

$$2\sin x(\sin x-1)=0$$

$$\sin x=0 \;\;\Rightarrow\;\; x_1=\pi n \;,\; n\in\mathbb{Z}$$

$$\sin x=1 \;\;\Rightarrow\;\; x_2=\tfrac{\pi}{2}+2\pi k \;,\; k\in\mathbb{Z}$$

בתחום הנתון: $x_1=0 \;,\; x_2=\tfrac{\pi}{2} \;,\; x_3=\pi \;,\; x_4=2\pi$

תשובה: $(0,0)$, $\left(\tfrac{\pi}{2},0\right)$, $(\pi,0)$, $(2\pi,0)$.

ג)

$$S=\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-2\cos2x-4\sin x)\,dx\right|=\left|(2x-\sin2x+4\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right|=$$

$$=\left|\pi-0+0-(0-0+4)\right|=\left|\pi-4\right|=(4-\pi)$$ יחידות שטח

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

ד) (i) $f(x)\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq 0\,,\frac{\pi}{2}\,,\pi\,,2\pi$

כלומר תחום ההגדרה: $0<x<\frac{\pi}{2}\;,\;\frac{\pi}{2}<x<\pi\;,\;\pi<x<2\pi$

(ii) $g'(x)=-\frac{1}{\left(f(x)\right)^2}\cdot f'(x)$

$g'(x)=0 \;\Rightarrow\; f'(x)=0$

כמו-כן, הסימן של $g'(x)$ מנוגד לסימן של $f'(x)$,

לכן אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום ששיעוריה

$\min(x_0\;,\;f(x_0))$, אז לפונקציה $g(x)$ נקבל:

$\max\left(x_0,\frac{1}{f(x_0)}\right)$, ואם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מקסימום

ששיעוריה $\max(x_1\;,\;f(x_1))$, אז לפונקציה $g(x)$ נקבל:

$\min\left(x_1,\frac{1}{f(x_1)}\right)$.

כלומר לפונקציה $g(x)$ יש נקודות קיצון בנקודות:

$$x=\frac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}=-1 \;\Rightarrow\; \max\left(\frac{\pi}{6},-1\right)$$

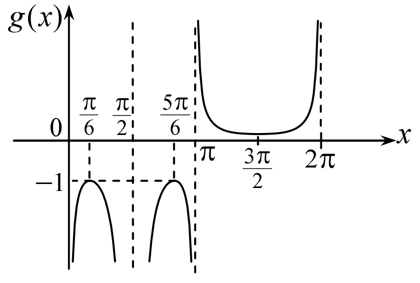
$$x=\frac{5\pi}{6} \;\Rightarrow\; g\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{f\left(\frac{5\pi}{6}\right)}=-1 \;\Rightarrow\; \max\left(\frac{5\pi}{6},-1\right)$$

$$x=\frac{3\pi}{2} \;\Rightarrow\; g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{1}{8} \;\Rightarrow\; \min\left(\frac{3\pi}{2},\frac{1}{8}\right)$$

(iii) תחומי עלייה: $0<x<\frac{\pi}{6}\;,\;\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{6}\;,\;\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$

תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}\;,\;\frac{5\pi}{6}<x<\pi\;,\;\pi<x<\frac{3\pi}{2}$

(iv)



גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות