פתרון מבחן מס' 22 (ספר לימוד – שאלון 035805)

(1) הסדרה המקורית: $a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ \dots \ , \ a_{12} \quad , \quad d=4$

הסדרה החדשה: $a_1 \ , \ a_1^{(1)} \ , \ a_2 \ , \ a_2^{(1)} \ , \ a_3 \ , \ \dots \ , \ a_{11}^{(1)} \ , \ a_{12}$

הפרש הסדרה החדשה: $D=\frac{1}{2}d=2$.

אפשר להתייחס לשתי הסדרות כסדרות יורדות:

$$a_{12} \ , \ a_{11} \ , \ a_{10} \ , \ \dots \ , \ a_1 \ \Rightarrow \ A_1=a_{12} \ , \ D=-4 \ , \ N=12$$

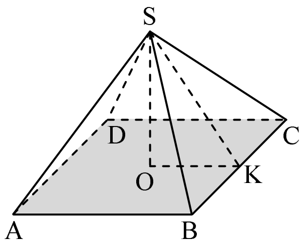
$$a_{12} \ , \ a_{11}^{(1)} \ , \ a_{11} \ , \ a_{10}^{(1)} \ , \ \dots \ , \ a_1 \ \Rightarrow \ A_1=a_{12} \ , \ D=-2 \ , \ N=23$$

לפי הנתון: $S^{(1)}=S+209$, נקבל:

$$(2a_{12}-2\cdot 22)\cdot\frac{23}{2}=(2a_{12}-4\cdot 11)\cdot\frac{12}{2}+209$$

$$(a_{12}-22)\cdot 23-(a_{12}-22)\cdot 12=209$$

$$11\cdot(a_{12}-22)=209 \ \Rightarrow \ a_{12}-22=19 \ \Rightarrow \ a_{12}=41$$



(2) (א) נתון כי שטח הריבוע בבסיס שווה

ל- 64 סמ"ר, מכאן:

$BC^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad BC =$ 8 ס"מ

הנקודה K היא אמצע הצלע BC,

לכן $SK \perp BC$ (תיכון לבסיס במשולש

שווה-שוקיים הוא גם גובה לבסיס). מכאן:

$S_{\Delta SBC} =$ 20 סמ"ר $\quad \Rightarrow \quad \frac{BC \cdot SK}{2} = 20 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \frac{8 \cdot SK}{2} = 20 \quad \Rightarrow \quad SK =$ 5 ס"מ

נתבונן ב- ΔSOK. לפי משפט פיתגורס:

$SO^2 = SK^2 - OK^2 = 5^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad SO =$ 3 ס"מ

$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 3 =$ 64 סמ"ק

(ב) ההיטל של הגובה SO על המישור SBC מונח על הקטע SK,

לכן הזווית המבוקשת היא $\measuredangle OSK$. במשולש ΔSOK:

$\sin \measuredangle S = \frac{OK}{SK} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle OSK = 53.13°$

(ג) לפי משפט פיתגורס ב- ΔABC:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 8^2 + 8^2 = 2 \cdot 64 \quad \Rightarrow \quad AC =$ $8\sqrt{2}$ ס"מ

$S_{\Delta ASC} = \frac{AC \cdot OS}{2} = \frac{8 \cdot \sqrt{2} \cdot 3}{2} =$ $12\sqrt{2}$ סמ"ר

(3) (א) משוואת האסימפטוטה האנכית היא $x=1$,
כי עבור $x=1$ המכנה מתאפס והמונה שונה מ- 0 .

(ב) שיעור ה- x של נקודת חיתוך גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$y=0 \Rightarrow \frac{2x-4}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2,0)$$

(ג)
$$f'(x)=\frac{2(x-1)^2-2(x-1)(2x-4)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)(x-1-2x+4)}{(x-1)^4}=$$
$$=\frac{2(3-x)}{(x-1)^3}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2(3-x)}{(x-1)^3}=0 \Rightarrow 2(3-x)=0 \Rightarrow x=3$$

$$x=3 \Rightarrow y=\frac{2\cdot 3-4}{(3-1)^2}=\frac{1}{2}$$

x	x < 1	x = 1	1 < x < 3	x = 3	x > 3
f′(x)	−		+	0	−
f(x)	↘		↗	max	↘

$$f'(0)=\frac{2\cdot 3}{(-1)^3}<0 \;,\; f'(2)=\frac{2\cdot 1}{1^3}>0 \;,\; f'(4)=\frac{2\cdot(-1)}{3^3}<0$$

כלומר : $\max\left(3,\frac{1}{2}\right)$.

(ד)
$$\frac{2}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{2(x-1)-2}{(x-1)^2}=\frac{2x-4}{(x-1)^2}=f(x)$$

(ה)
$$S=\int_2^3 f(x)\,dx=\int_2^3\frac{2x-4}{(x-1)^2}\,dx=\int_2^3\left(\frac{2}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx=$$
$$=\left(2\ln|x-1|+\frac{2}{x-1}\right)\Big|_2^3=2\ln 2+1-(2\ln 1+2)=$$
$$=(2\ln 2-1)\approx 0.386$$ יחידות שטח

(ו) $x>1 \;,\; g'(x)=f(x)=\frac{2x-4}{(x-1)^2}$

(i) $g(x)=\int g'(x)\,dx=\int f(x)\,dx=2\ln|x-1|+\frac{2}{x-1}+\mathrm{C}$

נתון כי : $g(3)=\ln 4e=\ln 4+1=2\ln 2+1$

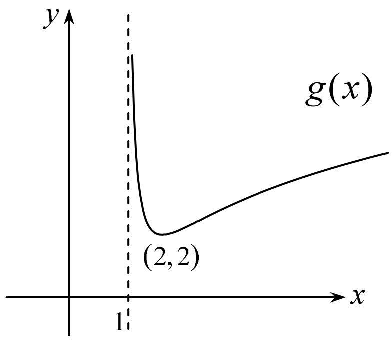
המשך בעמוד הבא ›››

$$2\ln(3-1)+\frac{2}{3-1}+C=2\ln 2+1$$

$$2\ln 2+1+C=2\ln 2+1 \;\Rightarrow\; C=0$$

עבור $x>1$ מתקיים: $x-1=\left|x-1\right|$ ולכן:

$$g(x)=2\ln(x-1)+\frac{2}{x-1}$$



(ii) ב- $x=2$ מתקיים $f(2)=0$,

לכן $g'(2)=0$, כלומר לפונקציה $g(x)$

יש נקודת קיצון (נקודת מינימום).

$$g(2)=2\ln 1+\frac{2}{2-1}=2$$

(4) (א) (i)

$$f'(x)=1-e^{x-4}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 1-e^{x-4}=0 \;\Rightarrow\; e^{x-4}=1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x-4=0 \;\Rightarrow\; x=4$$

$$x=4 \;\Rightarrow\; y=4-1-e^{4-4}=2 \;\Rightarrow\; (4,2)$$

x	x < 4	x = 4	x > 4
f′(x)	+	0	−
f(x)	↗	max	↘

$$f'(1)=1-e^{1-4}>0$$

$$f'(5)=1-e^{5-4}=1-e<0$$

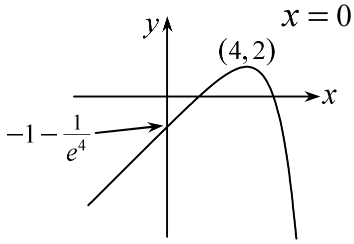
תשובה: $\max(4,2)$.

(ii) הפונקציה עולה עבור $x<4$ ויורדת עבור $x>4$.

(iii) בתחום $x<4$ הפונקציה עולה, לכן:

$$a<b \;\Rightarrow\; f(a)<f(b) \;\Rightarrow\; a-1-e^{a-4}<b-1-e^{b-4}$$

(iv) $x=0 \;\Rightarrow\; y=0-1-e^{0-4}=-1-\frac{1}{e^4}$



המשך בעמוד הבא >>>

(ב) נתון:

$\frac{1}{2}M_0 = M_0 \cdot q^{60} \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[60]{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{4}M_0 = M_0 \cdot q^{T} \quad , \quad T = ?$

$q^{T} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt[60]{\frac{1}{2}}\right)^{T} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{T}{60}} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$

$\frac{T}{60} = 2 \quad \Rightarrow \quad T =$ 120 שנים

(5) **(א)** (*i*) נתון כי:

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \cos\frac{\pi}{6} - a \cdot \sin\frac{\pi a}{6} = 0$

$\frac{a\sqrt{3}}{2} - a\sin\frac{\pi a}{6} = 0 \quad / : a \neq 0$

$\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\frac{\pi a}{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{\pi a}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi a}{6} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2 + 12n \ , \ n \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi a}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \quad \Rightarrow \quad a_2 = 4 + 12k \ , \ k \in \mathbb{Z}$

בתחום $0 < a < 3$ יש רק פתרון אחד: $a = 2$.

כלומר: $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$

(*ii*) b ו- c הם שיעורי ה- x של הנקודות בהן $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos x - 2\sin 2x = 0$

$\cos x - 2\sin x\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x(1 - 2\sin x) = 0$

$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n \ , \ n \in \mathbb{Z}$

$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m \ , \ m \in \mathbb{Z}$

בתחום $0 \leq x \leq \pi$ נמצאות נקודות אפס של הנגזרת:

$x_1 = \frac{\pi}{2} \ , \ x_2 = \frac{\pi}{6} \ , \ x_3 = \frac{5\pi}{6}$

מכאן: $b = \frac{\pi}{2} \ , \ c = \frac{5\pi}{6}$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(iii) ניעזר בגרף הנגזרת של $f(x)$ ונסיק:

$x=0$ מינימום קצה, $x=\frac{\pi}{6}$ מקסימום, $x=\frac{\pi}{2}$ מינימום,

$x=\frac{5\pi}{6}$ מקסימום, $x=\pi$ מינימום קצה.

(iv) ניעזר בגרף הנגזרת של $f(x)$ ונסיק:

תחומי עלייה: $0\le x<\frac{\pi}{6}$ או $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{6}$.

תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ או $\frac{5\pi}{6}<x\le\pi$.

(ב) (i)

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2\cos x-2\sin 2x)\,dx=$$
$$=2\sin x+\cos 2x+\mathrm{C}$$

נתון: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2 \;\Rightarrow\; f(\mathrm{b})=\mathrm{a}$, לכן:

$$2\sin\frac{\pi}{2}+\cos\pi+\mathrm{C}=2 \;\Rightarrow\; 2-1+\mathrm{C}=2 \;\Rightarrow\; \mathrm{C}=1$$

כלומר:

$$f(x)=2\sin x+\cos 2x+1$$

(ii)

$$S_2-S_1=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f'(x)\,dx=f(x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=$$
$$=2\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{3}+1-\left(2\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}+1\right)=$$
$$=1+\frac{1}{2}+1-\left(1+\frac{1}{2}+1\right)=0$$

$$S_2-S_1=0 \;\Rightarrow\; S_1=S_2$$

(iii) לפי סעיף (ב) (ii):

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\mathrm{c}} f'(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f'(x)\,dx=0$$

גבי יקואל

משבצת