

**פתרון מבחן מס' 21 (ספר לימוד – שאלון 035805)**

20-05-2017

$$S = a_1 \cdot \frac{q^{14} - 1}{q - 1} \quad (א) \quad (1)$$

סדרת האיברים במקומות האי-זוגיים (T) היא סדרה הנדסית:

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = \frac{a_1 \cdot q^{2n}}{a_1 \cdot q^{2n-2}} = q^2$$

בסדרה זו:  $A_1 = a_1$ ,  $Q = q^2$

$$T = a_1 \cdot \frac{(q^2)^7 - 1}{q^2 - 1} = a_1 \cdot \frac{q^{14} - 1}{(q-1)(q+1)} \quad \text{לכן:}$$

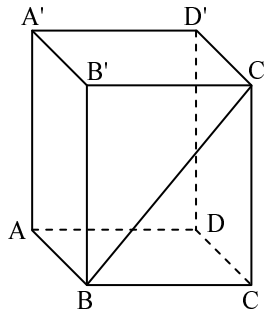
$$\frac{T}{S} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{a_1 (q^{14} - 1)}{(q-1)(q+1)} \cdot \frac{q-1}{a_1 (q^{14} - 1)} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{q+1} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5 = 3q + 3 \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

$$S_9 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^8 \quad (ב)$$

$$S_{\text{אחרונים 9}} = a_6 + a_7 + \dots + a_{14} = a_1 q^5 + a_1 q^6 + \dots + a_1 q^{13}$$

$$\frac{S_{\text{אחרונים 9}}}{S_9} = \frac{a_1 q^5 (1 + q + q^2 + \dots + q^8)}{a_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^8)} = q^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$



(2)  $CC'$  מאונך למישור הבסיס, לכן  $BC$  הוא ההיטל של  $BC'$  על מישור הבסיס, והזווית הנתונה היא:  $\angle C'BC = 62^\circ$ .

(א) הזווית המבוקשת היא  $\angle BD'B'$  ( $D'B'$  הוא ההיטל של  $D'B$  על המישור  $(A'B'C'D')$ ).

נסמן את אורך צלע הריבוע ב- $a$ .  
לפי משפט פיתגורס ב- $\triangle ABD$ :

$$DB^2 = AD^2 + AB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow DB = D'B' = a\sqrt{2}$$

$$\tan 62^\circ = \frac{CC'}{BC} \Rightarrow CC' = BB' = a \tan 62^\circ \quad \text{ב-} \triangle BCC'$$

$$\tan \angle D' = \frac{BB'}{D'B'} = \frac{CC'}{DB} = \frac{a \tan 62^\circ}{a\sqrt{2}} = \frac{\tan 62^\circ}{\sqrt{2}} \quad \text{ב-} \triangle BB'D'$$

$$\angle D' = \angle BD'B' = 53.06^\circ$$

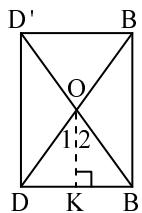
(ב)  $D'C'$  מאונך למישור  $BCC'B'$ , לכן  $BC'$  הוא ההיטל של  $D'C'$  על המישור  $BCC'B'$  והזווית המבוקשת היא  $\angle D'BC'$ .

$$\cos 62^\circ = \frac{BC}{BC'} \Rightarrow BC' = \frac{BC}{\cos 62^\circ} = \frac{a}{\cos 62^\circ} \quad \text{ב-} \triangle BCC'$$

$$\tan \angle B = \frac{D'C'}{BC'} = \frac{a \cos 62^\circ}{a} = \cos 62^\circ \quad \text{ב-} \triangle BC'D'$$

$$\angle B = \angle D'BC' \approx 25.15^\circ$$

(ג) נתבונן במלבן  $BDD'B'$ .



מנקודת מפגש האלכסונים  $O$  נוריד גובה  $OK$  לצלע  $DB$ .

$\triangle DOB$  הוא משולש שווה-שוקיים, לכן הגובה  $OK$

לבסיס הוא גם תיכון לבסיס ( $DK = KB = \frac{a}{2}$ ).

הזווית המבוקשת היא  $\angle DOB$ .

ב- $\triangle OKB$ :

$$\tan \angle O_2 = \frac{KB}{OK} = \frac{\frac{1}{2}DB}{\frac{1}{2}BB'} = \frac{a\sqrt{2}}{a \tan 62^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\tan 62^\circ} \Rightarrow \angle O_2 = 36.94^\circ$$

$$\angle DOB = 2 \cdot \angle O_2 = 2 \cdot 36.94^\circ = 73.88^\circ$$

$$0.4M_0 = M_0 \cdot q^7 \Rightarrow q^7 = 0.4 \Rightarrow q = 0.8773067 \quad (3)$$

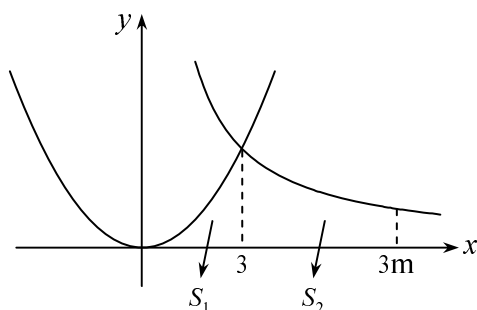
$$M_t = 0.25M_0 = M_0 \cdot q^t \Rightarrow q^t = 0.25 \quad (i) \text{ (א)}$$

$$0.8773067^t = 0.25 \Rightarrow t = \frac{\ln 0.25}{\ln 0.8773067} \approx 10.59 \text{ שנים}$$

$$M_5 = M_0 \cdot q^5 = M_0 \cdot 0.8773067^5 \approx 0.5197M_0 \quad (ii)$$

המחיר ירד ב-  $M_0 - 0.5197M_0 = 0.4803M_0$ , המהווים:

$$\text{ממחירה ההתחלתי של המכונות.} \quad \frac{0.4803M_0}{M_0} \cdot 100\% = 48.03\%$$



(ב) נמצא את שיעור ה-  $x$

של נקודת החיתוך בין הגרפים:

$$\frac{x^2}{3} = \frac{9}{x}$$

$$x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$$

$$S_{\text{מבוקש}} = 12 = S_1 + S_2$$

$$S_1 = \int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{9} \Big|_0^3 = \frac{1}{9}(27 - 0) = 3 \text{ יחידות שטח}$$

$$S_2 = \int_3^{3m} f(x) dx = \int_3^{3m} \frac{9}{x} dx = 9 \ln|x| \Big|_3^{3m} =$$

$$= 9(\ln 3m - \ln 3) = 9 \ln m \text{ יחידות שטח}$$

$$3 + 9 \ln m = 12 \Rightarrow 9 \ln m = 9 \Rightarrow \ln m = 1 \Rightarrow m = e$$

(4) (א) תחום הגדרה: כל  $x$ .

$$f'(x) = 5^{2x} \cdot 2 \ln 5 - 6 \cdot 5^x \ln 5 \quad (ב)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 5^{2x} \cdot 2 \ln 5 - 6 \cdot 5^x \ln 5 = 0$$

$$2 \ln 5 \cdot 5^x \cdot (5^x - 3) = 0$$

$2 \ln 5 \cdot 5^x \neq 0$  לכל  $x$ , לכן:

$$5^x - 3 = 0 \Rightarrow 5^x = 3 \Rightarrow x = \log_5 3 = \frac{\ln 3}{\ln 5}$$

◀◀◀ המשך בעמוד הבא

$$y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$$

| x       | $x < \frac{\ln 3}{\ln 5}$ | $x = \frac{\ln 3}{\ln 5}$ | $x > \frac{\ln 3}{\ln 5}$ |
|---------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $f'(x)$ | -                         | 0                         | +                         |
| $f(x)$  | ↘                         | min                       | ↗                         |

$$f'(0) = (+) \cdot (1-3) < 0 \quad , \quad f'(1) = (+) \cdot (5-3) > 0$$

$$\text{נקודת קיצון: } \min\left(\frac{\ln 3}{\ln 5}, -4\right)$$

(ג) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ :

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 - 6 \cdot 1 + 5 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ :

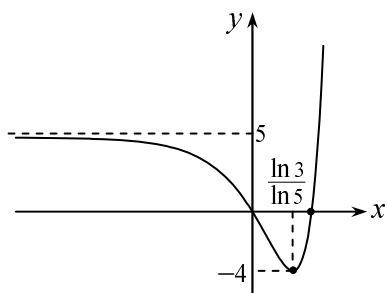
$$y = 0 \Rightarrow 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0 \Rightarrow (5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

$$5^x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow 5^x_1 = 5, \quad 5^x_2 = 1$$

$$5^x_1 = 5 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0)$$

$$5^x_2 = 1 = 5^0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

תשובה:  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$



(ד)

$$I = \int_0^1 (5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5) dx = \left( \frac{5^{2x}}{2 \ln 5} - 6 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} + 5x \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{25}{2 \ln 5} - \frac{30}{\ln 5} + 5 - \left( \frac{1}{2 \ln 5} - \frac{6}{\ln 5} \right) = 5 - \frac{35}{2 \ln 5} + \frac{11}{2 \ln 5} = 5 - \frac{12}{\ln 5}$$

השטח נמצא מתחת לציר ה- $x$ , לכן:

$$S = -I = \left( \frac{12}{\ln 5} - 5 \right) \approx 2.456 \text{ יחידות שטח}$$

(5) (א) (i) הפונקציה  $f(x)$  עולה כאשר  $f'(x) > 0$ ,  
 כלומר בתחום  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ .

הפונקציה  $f(x)$  יורדת כאשר  $f'(x) < 0$ ,  
 כלומר בתחום  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ .

$$f'(0) = 5 \Rightarrow a \cos 0 - b \sin 0 = 5 \Rightarrow a = 5 \quad (ii)$$

$$S_{\text{מקווקו}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 \cos x - b \sin 2x) dx = \left( 5 \sin x + \frac{b}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \quad (ב)$$

$$= 5 \sin \frac{\pi}{2} + \frac{b}{2} \cos \pi - \left( 0 + \frac{b}{2} \right) = 5 - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} = 5 - b$$

$$5 - b = 3 \Rightarrow b = 2$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (5 \cos x - 2 \sin 2x) dx = \quad (i) \quad (ג)$$

$$= 5 \sin x + \cos 2x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow 5 \sin \frac{\pi}{2} + \cos \pi + C = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 - 1 + C = 1 \Rightarrow C = -3$$

$$f(x) = 5 \sin x + \cos 2x - 3 \quad \text{תשובה:}$$

(ii) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ :

$$x = 0 \Rightarrow y = 5 \sin 0 + \cos 0 - 3 = 0 + 1 - 3 = -2$$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ :

$$y = 0 \Rightarrow 5 \sin x + \cos 2x - 3 = 0$$

$$5 \sin x + 1 - 2 \sin^2 x - 3 = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$$

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow (\sin x)_1 = 2, (\sin x)_2 = \frac{1}{2}$$

הפתרון  $\sin x = 2$  נפסל כי  $\sin x \leq 1$ .

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{תשובה: } \left( 0, -2 \right), \left( \frac{\pi}{6}, 0 \right), \left( \frac{5\pi}{6}, 0 \right)$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$f'(x) = 5 \cos x - 2 \sin 2x \quad (iii)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 5 \cos x - 2 \sin 2x = 0$$

$$5 \cos x - 4 \sin x \cos x = 0$$

$$\cos x (5 - 4 \sin x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \text{ או } \sin x = \frac{5}{4}$$

הפתרון  $\sin x = \frac{5}{4}$  נפסל, כי  $\sin \leq 1$ .

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

בתחום הנתון:  $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ .

נתייחס גם לנקודת הקצה:  $x_3 = 0$ .

$$f(0) = -2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \sin \frac{\pi}{2} + \cos \pi - 3 = 5 - 1 - 3 = 1$$

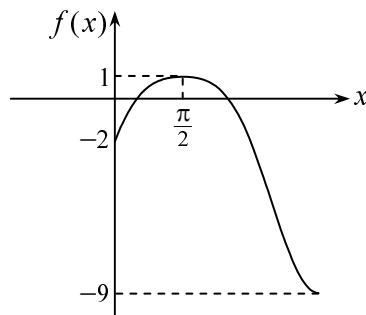
$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 5 \sin \frac{3\pi}{2} + \cos 3\pi - 3 = -5 - 1 - 3 = -9$$

לפי רציפות הפונקציה, אפשר לקבוע:

$(0, -2)$  מינימום קצה,  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$  מקסימום,

$\left(\frac{3\pi}{2}, -9\right)$  מינימום קצה (מוחלט).

(iv)



**גבי יקואל**

**מ ש ב צ ת**

**[www.mishbetzet.co.il](http://www.mishbetzet.co.il)**

**טלפון: 04-8200929**

**ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה**

**לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות**