

פתרון מבחן מס' 19 (ספר לימוד – שאלון 035805)

20-05-2017

(1) נתונה סדרה חשבונית: a_1, a_2, \dots ונתונה סדרה הנדסית: b_1, b_2, \dots .
 כמו-כן נתון: $a_1 = \frac{2}{3}, d = q > 0, b_1 = \frac{2}{3}$

סכום שלושת האיברים הראשונים: $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$

$$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = b_1 + b_1q + b_1q^2$$

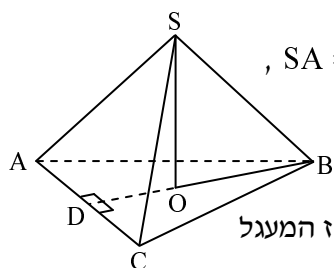
$$3a_1 + 3d = b_1(1 + q + q^2)$$

נציב את הנתונים ונקבל: $2 + 3d = \frac{2}{3}(1 + d + d^2) \Rightarrow 2d^2 - 7d - 4 = 0$

$$d_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4}$$

נתון כי $q = d > 0$, $d_1 = 4$, $d_2 = -\frac{1}{2}$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3a_1 + 3d = 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14$$



(2) נתון: $SA = SB = SC = 3a, AB = BC = AC = 2a$

SO מאונך למישור ABC.

צריך למצוא את $\sphericalangle SBO$.

מכיוון שהפירמידה ישרה, הרי שנקודה O היא מרכז המעגל

החוסם את $\triangle ABC$. $\triangle ABC$ הוא משולש שווה-צלעות (כי הפירמידה

משוכללת) ו-O היא נקודת מפגש התיכונים ב- $\triangle ABC$.

נקודת מפגש התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס 2:1, לכן: $BO = \frac{2}{3} \cdot BD$

לפי משפט פיתגורס ב- $\triangle ABD$: $AB^2 = AD^2 + BD^2$

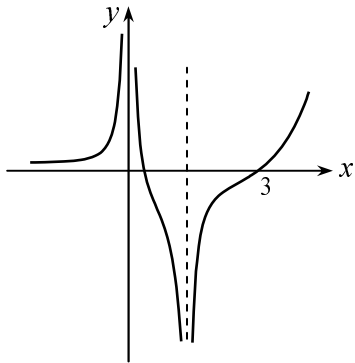
$$(2a)^2 = a^2 + BD^2 \Rightarrow 4a^2 = a^2 + BD^2$$

$$BD^2 = 3a^2 \Rightarrow BD = \sqrt{3} a$$

$$BO = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} a = \frac{2\sqrt{3}}{3} a \quad \text{ואז:}$$

$$\cos \sphericalangle B = \frac{OB}{SB} \Rightarrow \cos \sphericalangle B = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} a}{3a} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad \text{ב-} \triangle SOB$$

מכאן: $\sphericalangle SBO = 67.36^\circ$



(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x}{ax^2 - 3x}$

בסרטוט מתואר גרף הפונקציה הנגזרת של הפונקציה הנתונה.

(א) נגזרת הפונקציה:

$$f'(x) = \frac{e^x(ax^2 - 3x) - e^x(2ax - 3)}{(ax^2 - 3x)^2} = \frac{e^x(ax^2 - 3x - 2ax + 3)}{(ax^2 - 3x)^2}$$

לפי הגרף: $f'(3) = 0$.

נציב בנגזרת הפונקציה ונקבל:

$$\frac{e^3(a \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 2a \cdot 3 + 3)}{(a \cdot 3^2 - 3 \cdot 3)^2} = 0$$

$$\frac{e^3(9a - 9 - 6a + 3)}{(9a - 9)^2} = \frac{e^3(3a - 6)}{(9a - 9)^2} = 0 \Rightarrow 3a - 6 = 0 \Rightarrow a = 2$$

(ב) $f(x) = \frac{e^x}{2x^2 - 3x}$

$$2x^2 - 3x \neq 0 \Rightarrow x(2x - 3) \neq 0$$

$x \neq 0, x \neq \frac{3}{2}$ לכן, תחום ההגדרה:

(ג) $x = 0$ אינו שייך לתחום ההגדרה.

לכן, אין לגרף הפונקציה נקודת חיתוך עם ציר ה- y .

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x : $y = 0$

אבל אז: $f(x) = \frac{e^x}{2x^2 - 3x} = 0 \Rightarrow e^x = 0$

זה לא ייתכן כי $e^x > 0$ לכל ערך של x .

כלומר אין לגרף הפונקציה הנתונה נקודות חיתוך עם הצירים.

המשך בעמוד הבא <<<

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x(2x^2 - 3x - 4x + 3)}{(2x^2 - 3x)^2} = 0 \quad (ד)$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = \frac{e^3}{18-9} = \frac{e^3}{9}, \quad y_2 = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{-1} = -\sqrt{e} \approx -1.65$$

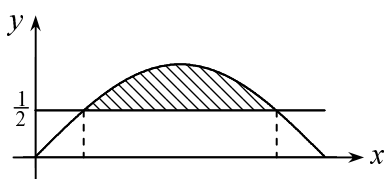
לפי גרף הנגזרת אפשר לקבוע: $\min(3, \frac{e^3}{9}), \max(\frac{1}{2}, -\sqrt{e})$

(ה) תחומי העלייה של הפונקציה (כשהנגזרת חיובית):

$$x > 3, \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \quad x < 0$$

תחומי הירידה של הפונקציה (כשהנגזרת שלילית):

$$\frac{3}{2} < x < 3, \quad \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$



(4) הפונקציה המתוארת בגרף $y = \sin \frac{x}{2}$

בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

נמצא קודם את שיעורי ה- x

של נקודות החיתוך של הישר $y = \frac{1}{2}$

עם גרף הפונקציה (גבולות האינטגרציה).

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{או} \quad \frac{x}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$= \frac{\pi}{3} + 4\pi n \quad \text{או} \quad x = \frac{5\pi}{3} + 4\pi k \quad \text{כלומר:}$$

כאשר $n, k \in \mathbb{Z}$.

בתחום הנתון נמצאות הנקודות שאלה שיעורי ה- x שלהן: $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = \left(-2 \cos \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} = \text{לכן, השטח המבוקש הוא:}$$

$$= -2 \cos \frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} - \left(-2 \cos \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} =$$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi \approx 1.37 \text{ יחידות שטח}$$

$$y = 2 \ln x - \ln^2 x = \ln x(2 - \ln x) \quad (5)$$

(א) תחום ההגדרה: $x > 0$.

(ב) אין לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- y מאחר ש- $x = 0$ אינו שייך לתחום ההגדרה.

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x : $y = 0$

$$\ln x(2 - \ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \quad \text{או} \quad \ln x = 2$$

$$x = 1 \quad \text{או} \quad x = e^2$$

כלומר: $(1, 0)$, $(e^2, 0)$.

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{x} - 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \cdot (1 - \ln x) \quad (ג)$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{2}{x} \cdot (1 - \ln x) = 0 \Rightarrow (1 - \ln x) = 0$$

$$\ln x = 1 \Rightarrow x = e, \quad y = 2 - 1^2 = 1$$

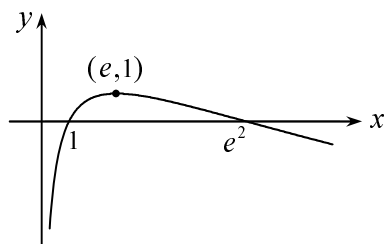
x	$0 < x < e$	$x = e$	$x > e$
y'	+	0	-
y	↗	max	↘

$$y'(1) = \frac{2}{1}(1 - 0) > 0$$

$$y'(e^2) = \frac{2}{e^2}(1 - 2) < 0$$

כלומר: $\max(e, 1)$.

(ד)



גבי יקואל

מ ש ב צ ת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות