פתרון מבחן מס' 15 (ספר לימוד – שאלון 035805)

20-05-2017

(1) (א)

$$b_1 = a_1 + a_3 = a_1(1+q^2)$$
$$b_2 = a_2 + a_4 = a_1q(1+q^2)$$
$$b_3 = a_3 + a_5 = a_1q^2(1+q^2)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$b_n = a_n + a_{n+2} = a_1q^{n-1}(1+q^2)$$

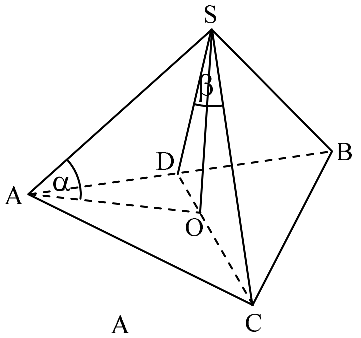
(ב) נוכיח כי הסדרה $b_n = a_1q^{n-1}(1+q^2)$ היא סדרה הנדסית.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_1q^n(1+q^2)}{a_1q^{n-1}(1+q^2)} = q = \text{קבוע}$$

כלומר הסדרה $\{b_n\}$ היא סדרה הנדסית שמנתה היא q

והאיבר הראשון שלה הוא $b_1 = a_1(1+q^2)$.

(ג)
$$S_n = b_1\frac{q^n-1}{q-1} = a_1(1+q^2)\frac{q^n-1}{q-1}$$



(2) נתון:

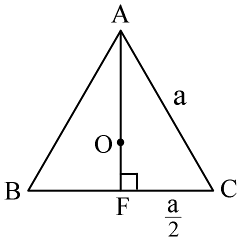
$SA = SB = SC$ (בפירמידה ישרה,

המקצועות הצדדיים שווים זה לזה).

$AB = BC = AC$

$SO = \frac{1}{2}AB$, $SO \perp ABC$ מישור

נסמן: $AB = BC = AC = a$.



(א) הזווית בין המקצוע הצדדי SA

לבין הבסיס ABC היא $\measuredangle SAO$.

נקודה O היא מרכז המעגל החוסם את ΔABC .

נתבונן ב- ΔABC , $AF \perp BC$,

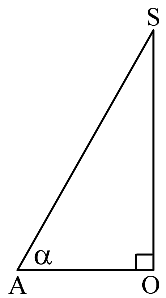
ו- AF הוא גם תיכון.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

דרך ראשונה:

לפי משפט פיתגורס: $AF=\sqrt{AC^2-CF^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $1:2$.



ב- ΔSAO : $AO=\frac{2}{3}AF=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\tan\alpha=\frac{SO}{AO}=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

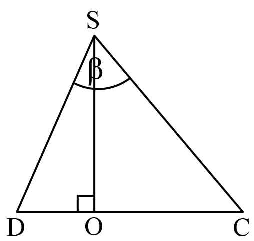
מכאן נקבל: $\measuredangle SAO=\alpha\approx 40.89°$

דרך שנייה:

לפי משפט הסינוסים ב- ΔABC נקבל: $\frac{a}{\sin 60°}=2R \Rightarrow AO=R=\frac{a}{\sqrt{3}}$

ב- ΔSAO : $\tan\alpha=\frac{SO}{AO}=\frac{\frac{1}{2}\cdot a}{\frac{a}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha\approx 40.89°$

(ב) נתון כי משולש ABC הוא משולש שווה-צלעות,
לכן כל התיכונים שווים זה לזה.



$AF=DC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

ואז: $AO=CO=\frac{2}{3}DC=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Downarrow$

$DO=\frac{1}{3}DC=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{2\sqrt{3}}$

לפי הנתון: $SO=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$

נתבונן ב- ΔDSC ונסמן: $\measuredangle DSC=\measuredangle DSO+\measuredangle CSO=\beta$

ב- ΔSOD : $\tan\measuredangle DSO=\frac{DO}{SO}=\frac{a}{2\sqrt{3}}:\frac{a}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \measuredangle DSO=30°$

ב- ΔSOC : $\tan\measuredangle CSO=\frac{CO}{SO}=\frac{a\sqrt{3}}{3}:\frac{a}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \measuredangle CSO\approx 49.11°$

הזווית המבוקשת: $\beta=\measuredangle DSO+\measuredangle CSO=30°+49.11°=79.11°$

(3) (א) תחום הגדרה:

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ \ln x^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \neq 0 , \pm 1$$

(ב)

$$y' = \frac{1 \cdot \ln x^2 - x \cdot \frac{2x}{x^2}}{(\ln x^2)^2} = \frac{\ln x^2 - 2}{(\ln x^2)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \ln x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = e^2 \Rightarrow x_1 = e \ , \ x_2 = -e$$

(ג)

x	x < −e	x = −e	−e < x < −1
y'	+	0	−
y	↗	max	↘

x	1 < x < e	x = e	x > e
y'	−	0	+
y	↘	min	↗

$$y'(e^2) = \frac{4-2}{+} > 0 \quad , \quad y'(\sqrt{e}) = \frac{1-2}{+} < 0$$

$$y'(-\sqrt{e}) = \frac{1-2}{+} < 0 \quad , \quad y'(-e^2) = \frac{4-2}{+} > 0$$

כלומר: $x_{max} = -e \ , \ x_{min} = e$.

(4) (א)

$$f'(x) = 1 + 2\sin 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + 2\sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{12} + \pi n \ , \ n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x_1 = \frac{7\pi}{12} + \pi k \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

בתחום הנתון: $x_2 = -\frac{5\pi}{12} \ , \ x_1 = -\frac{\pi}{12}$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$f''(x)=4\cos 2x$$

$$f''\left(-\tfrac{\pi}{12}\right)=4\cos\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)>0 \quad\Rightarrow\quad x_{\min}=-\tfrac{\pi}{12}$$

$$f''\left(-\tfrac{5\pi}{12}\right)=4\cos\left(-\tfrac{5\pi}{6}\right)<0 \quad\Rightarrow\quad x_{\max}=-\tfrac{5\pi}{12}$$

(ב) $\min :\ x=-\tfrac{\pi}{12} \quad\Rightarrow\quad y=-\tfrac{\pi}{12}-\cos\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)=-1.13$

$$\max :\ x=-\tfrac{5\pi}{12} \quad\Rightarrow\quad y=-\tfrac{5\pi}{12}-\cos\left(-\tfrac{5\pi}{6}\right)=-0.44$$

בנקודת קיצון משוואת המשיק לגרף הפונקציה היא מהצורה: $y=$ קבוע ,

לכן משוואות המשיקים: $y=-1.13$, $y=-0.44$.

(5) (א) $f(x)=g(x) \quad\Rightarrow\quad e^{3x}=e^{x} \quad\Rightarrow\quad 3x=x \quad\Rightarrow\quad x=0$

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad y=e^{0}=1$$

כלומר שיעורי נקודת המפגש של הגרפים של שתי הפונקציות: $(0,1)$.

(ב) $f(1)=e\ ,\ g(1)=e^{3}$

$f(1)<g(1)$, לכן בתחום בין $x=0$ ל- $x=1$ הגרף של $g(x)$ נמצא מעל הגרף של $f(x)$.

$$S=\int_0^1 (e^{3x}-e^{x})\,dx=\left(\frac{e^{3x}}{3}-e^{x}\right)\Bigg|_0^1=\frac{e^{3}}{3}-e^{1}-\left(\frac{e^{0}}{3}-e^{0}\right)=$$

$$=\frac{e^{3}}{3}-e-\frac{1}{3}+1=\frac{e^{3}}{3}-e+\frac{2}{3}\approx 4.644$$ יחידות שטח