

**פתרון מבחן מס' 14 (ספר לימוד – שאלון 035805)**

20-05-2017

(1) (א) הסדרה היא סדרה חשבונית שהפרשה  $d$ , כי מתקיים:  $a_{n+1} - a_n = d$ .  
נתון:  $a_{29} = 184$ ,  $a_{30} = 178$ , כלומר:

$$a_{30} = a_{29} + d \Rightarrow 178 = 184 + d$$

מכאן:  $d = -6$ .

$$a_{30} = a_1 + 29d \Rightarrow 178 = C + 29 \cdot (-6) \Rightarrow C = 352$$

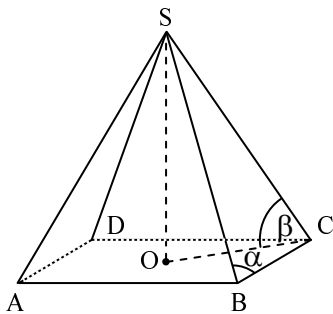
(ב) לפי נוסחת סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה חשבונית:

$$468 = [2 \cdot 352 - 6 \cdot (n-1)] \cdot \frac{n}{2} \Rightarrow 468 = (352 - 3n + 3) \cdot n$$

$$3n^2 - 355n + 468 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{355 \pm 347}{2}$$

$$n_1 = 117, n_2 = \frac{4}{3}$$

$n$  הוא מספר טבעי, לכן  $n = 117$ .



(2) נתון כי הזווית בין המקצוע הצדדי לבין הבסיס

היא  $\beta$ . זוהי הזווית בין מקצוע SC

לבין OC (היטל SC על המישור ABCD).

(א) נסמן את צלע הריבוע ב-  $a$ ,

כלומר:  $BC = a$ .

לפי משפט פיתגורס ב-  $\triangle ABC$ :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$AC = \sqrt{2}a \Rightarrow OC = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}a}{2}$$

$$\cos\beta = \frac{OC}{SC} \Rightarrow SC = \frac{OC}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{2}a}{2\cos\beta} \quad \text{ב- } \triangle SOC$$

ב-  $\triangle BSC$  לפי משפט הסינוסים:

$$\frac{SC}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow SC = \frac{BC \cdot \sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{a \sin\alpha}{2\sin\alpha \cos\alpha} = \frac{a}{2\cos\alpha}$$

$$\frac{\sqrt{2}a}{2\cos\beta} = \frac{a}{2\cos\alpha} \Rightarrow \cos\beta = \sqrt{2}\cos\alpha \quad \text{ברור ש- } SC = SC, \text{ אז:}$$

$$\cos^2\beta = 2\cos^2\alpha \quad \text{מ.ש.ל.}$$

$$M = 4 \cdot S_{\triangle BCS} = 4 \cdot \frac{a \cdot h_{BC}}{2} = 2a \cdot h_{BC} \quad \text{(ב) שטח מעטפת}$$

נתבונן ב-  $\triangle SBC$ : הגובה לבסיס BC (SK)

$$BK = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, \quad \text{הוא גם תיכון, אז,}$$

$$SK = h_{BC} = \frac{a}{2} \tan\alpha = \frac{a}{2} \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$\cos\beta = \sqrt{2}\cos\alpha \quad \text{בסעיף (א) קיבלנו:}$$

$$\cos\beta = \sqrt{2}\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = 45^\circ$$

אז  $\triangle SOC$  הוא משולש שווה-שוקיים.

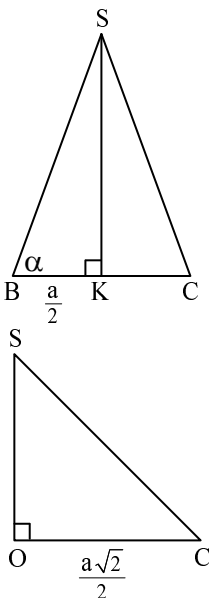
$$OC = OS \Rightarrow \frac{\sqrt{2}a}{2} = h$$

$$a = \frac{2h}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}h$$

$$M = 2ah_{BC} = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \sqrt{3}a^2 =$$

$$= \sqrt{3}(\sqrt{2}h)^2 = 2\sqrt{3}h^2$$

מ.ש.ל.



(3) נתון:  $y = \ln^2 x - 4 \ln x$ . תחום ההגדרה:  $x > 0$ .

(א) נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ :  $y = 0$

$$\ln^2 x - 4 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x (\ln x - 4) = 0$$

$$\ln x = 0, \ln x = 4 \Rightarrow x = 1, x = e^4$$

נתון כי  $x_1 < x_2$  לכן:  $x_1 = 1, x_2 = e^4$

(ב) כדי למצוא את המקסימום והמינימום המוחלט, צריך למצוא נקודות קיצון

פנימיות של הפונקציה ואת נקודות הקצה ולבחור בין כל שיעורי ה- $y$  של

נקודות אלה את הערך המקסימלי והערך המינימלי.

מציאת נקודות חשודות לקיצון:  $y' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - 4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} (\ln x - 2)$

$$y' = 0$$

$$\frac{2}{x} (\ln x - 2) = 0 \Rightarrow \ln x - 2 = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$$

x	$1 \leq x < e^2$	$x = e^2$	$e^2 < x \leq e^4$
$y'$	-	0	+
$y$	↘	min	↗

$$y'(2) = \frac{2}{2} (\ln 2 - 2) < 0$$

$$y'(e^3) = \frac{2}{e^3} (\ln e^3 - 2) > 0$$

$$y(e^2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 \Rightarrow \min(e^2, -4)$$

שיעורי ה- $y$  בנקודות החשודות לקיצון כולל בנקודות הקצה:

$$y(x_1) = y(1) = 0$$

$$y(e^2) = -4$$

$$y(x_2) = y(e^4) = 4^2 - 4 \cdot 4 = 0$$

נקודות המקסימום המוחלט:  $(1, 0), (e^4, 0)$

נקודות המינימום המוחלט:  $(e^2, -4)$

כלומר המקסימום המוחלט הוא 0 והמינימום המוחלט הוא -4.

$$y = 6 \sin 2x - 3, \quad 0 < x < \pi \quad (4)$$

(א) בתחום הנתון ( $0 < x < \pi$ ) אין לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ .

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ :

$$y = 0 \Rightarrow 6 \sin 2x - 3 = 0$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{או} \quad 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi n \quad \text{או} \quad x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$$

$$n, k \in Z$$

בתחום הנתון ( $0 < x < \pi$ ) נמצאות הנקודות הבאות:

$$x = \frac{\pi}{12}, (n=0), \quad x = \frac{5\pi}{12}, (k=0)$$

לכן שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים הם:

$$\left(\frac{\pi}{12}, 0\right), \left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$$

$$y' = 6 \cdot 2 \cos 2x = 12 \cos 2x \quad (ב)$$

$$y' = 0 \Rightarrow 12 \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} \\ y = 6 \sin \frac{\pi}{2} - 3 = 3 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{4} \\ y = 6 \sin \frac{3\pi}{2} - 3 = -9 \end{array} \right\} \quad \text{בתחום הנתון:}$$

x	$0 < x < \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$	$x = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4} < x < \pi$
$y'$	+	0	-	0	+
$y$	↗	max	↘	min	↗

$$y'(0.001) = 12 \cdot (+) > 0$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12 \cos \pi = -12 < 0$$

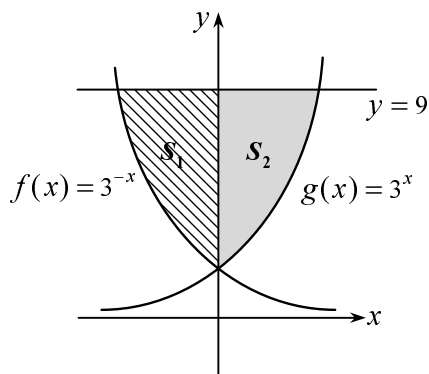
$$y'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 12 \cos \frac{5\pi}{3} > 0$$

$$\max\left(\frac{\pi}{4}, 3\right), \min\left(\frac{3\pi}{4}, -9\right) \quad \text{כלומר:}$$

(ג) המשיק לגרף הפונקציה בנקודת הקיצון מקביל לציר ה- $x$ ,

לכן, משוואות המשיקים בנקודות הקיצון הן:  $y = 3$ ,  $y = -9$

$$l = 3 - (-9) = 12 \text{ יחידות הוא המרחק בין המשיקים}$$



$$f(x) = 3^{-x} \quad (5)$$

(א) מכיוון ש-  $g(-x) = 3^{-x} = f(x)$

הרי שגרף הפונקציה  $g(x)$

סימטרי לגרף הנתון

ביחס לציר ה-  $y$ .

(ב) נמצא קודם את גבולות

האינטגרציה :

נקודות החיתוך של הישר  $y = 9$

עם הגרפים של  $f(x)$  ו-  $g(x)$ .

$$3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2, \quad 3^{-x} = 9 = 3^2 \Rightarrow x = -2$$

ציר ה-  $y$  מחלק את השטח לשני חלקים שווים (לפי הסימטריה של

הגרפים), כלומר:  $S_1 = S_2$ .

כלומר השטח המבוקש:  $S = 2 \cdot S_2$ .

לכן מספיק למצוא רק שטח אחד ( $S_2$ ).

$$S_2 = \int_0^2 (9 - 3^x) dx = \left( 9x - \frac{3^x}{\ln 3} \right) \Big|_0^2 = 9 \cdot 2 - \frac{3^2}{\ln 3} - \left( 0 - \frac{1}{\ln 3} \right) =$$

$$= 18 - \frac{9}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3} = \text{שטח} \left( 18 - \frac{8}{\ln 3} \right)$$

$$S = 2 \cdot S_2 = 36 - \frac{16}{\ln 3} \approx 21.436 \text{ יחידות שטח} : \text{השטח המבוקש הוא}$$

**גבי יקואל**

**מ ש ב צ ת**

**[www.mishbetzet.co.il](http://www.mishbetzet.co.il)**

**טלפון: 04-8200929**

**ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה**

**לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות**