

פתרון מבחן מס' 10 (ספר לימוד – שאלון 035805)

17-05-2017

(1) (א) $a_1, a_2, a_3, \dots$ היא סדרה הנדסית שמנתה $Q_1 = 9q^2$ ($0 < q < \frac{1}{3}$).

$b_1, b_2, b_3, \dots$ היא הסדרה ההנדסית החדשה שכל איבריה חיוביים.

נסמן: $\{b_n\} : a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3, \dots$

מכיוון שגם הסדרה b_n הנדסית, הרי שמתקיים:

$$A_1^2 = a_1 \cdot a_2 \Rightarrow A_1 = \sqrt{a_1 \cdot a_1 \cdot Q_1} = \sqrt{a_1^2 \cdot 9q^2}$$

כלומר: $A_1 = 3a_1q$, ואז מנת הסדרה החדשה: $Q_2 = \frac{A_1}{a_1} = 3q$

(ב) נתון: $S_b = 40q^2 \cdot S_a$, מכאן: $\frac{a_1}{1-3q} = 40q^2 \cdot \frac{a_1}{1-9q^2}$

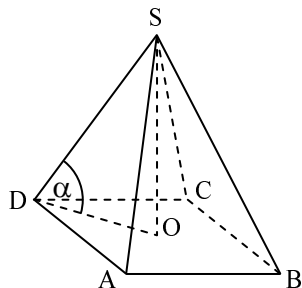
$$\frac{1}{1-3q} = \frac{40q^2}{(1-3q)(1+3q)} \Rightarrow 40q^2 = 1+3q$$

$$40q^2 - 3q - 1 = 0 \Rightarrow q_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+160}}{80} = \frac{3 \pm 13}{80}$$

$$q_1 = \frac{1}{5}, q_2 = -\frac{1}{8}$$

נתון $q > 0$, לכן $q = \frac{1}{5}$.

$$\frac{a_1}{S_b - a_1} = \frac{a_1}{\frac{a_1}{1-\frac{3}{5}} - a_1} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{2}{5}} - 1} = \frac{1}{\frac{5}{2} - 1} = \frac{2}{3} \quad (ג)$$



(2) הזוויות בין כל אחד מהמקצועות הצדדיים

לבין הבסיס שוות זו לזו.

$$\angle SDO = \alpha$$

(SO – גובה פירמידה).

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO \quad (\text{א})$$

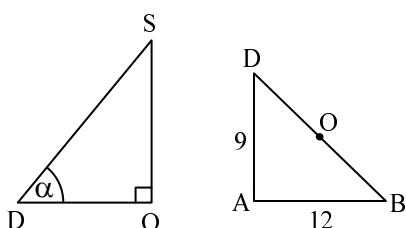
$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 12 \cdot 9 = 108 \text{ סמ"ר}$$

נתבונן ב- $\triangle SDO$.

כדי לבטא את SO באמצעות α ,

צריך למצוא את אורך הצלע DO.

נתבונן ב- $\triangle ADB$.



$$DB^2 = AB^2 + AD^2 = 12^2 + 9^2 = 225$$

לפי משפט פיתגורס:

$$DB = \sqrt{225} = 15 \text{ ס"מ}$$

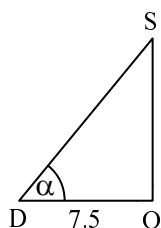
$$DO = \frac{1}{2} DB = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ ס"מ}$$

אז במשולש SDO:

$$\tan \alpha = \frac{SO}{DO} = \frac{SO}{7.5} \Rightarrow SO = 7.5 \tan \alpha$$

לכן, נפח הפירמידה:

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot 108 \cdot 7.5 \tan \alpha = 270 \tan \alpha \text{ סמ"ק}$$



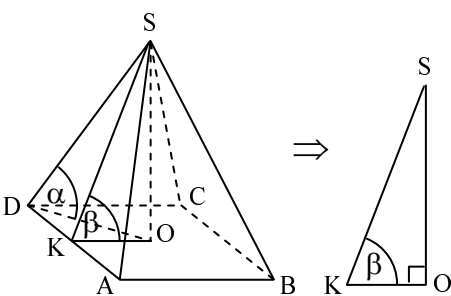
(ב) נתון: $SK \perp DA$, $\alpha = 58^\circ$

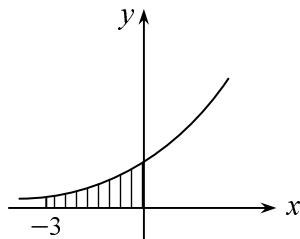
צ"ל: $\angle SKO (\beta) = ?$

נתבונן ב- $\triangle SKO$.

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \frac{SO}{KO} = \frac{SO}{\frac{1}{2} AB} = \\ &= \frac{7.5 \tan \alpha}{\frac{1}{2} \cdot 12} = \frac{7.5 \tan \alpha}{6} = \\ &= \frac{7.5 \tan 58^\circ}{6} \approx 2 \end{aligned}$$

$$\beta \approx 63.44^\circ$$





$$A > 0, f(x) = A \cdot 2^x \quad (3)$$

$$S_{\text{מקווקו}} = \frac{7}{2 \cdot \ln 2} \quad \text{נתון:}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{מקווקו}} &= \int_{-3}^0 f(x) dx = \int_{-3}^0 A \cdot 2^x dx = \\ &= A \int_{-3}^0 2^x dx = A \cdot \left. \frac{2^x}{\ln 2} \right|_{-3}^0 = \\ &= \frac{A}{\ln 2} (2^0 - 2^{-3}) = \\ &= \frac{A}{\ln 2} \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{8} \cdot \frac{A}{\ln 2} \end{aligned}$$

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{A}{\ln 2} = \frac{7}{2 \cdot \ln 2} \Rightarrow A = 4 \quad \text{לפי הנתון:}$$

$$f(x) = a \sin^2 x - bx \quad (4) \quad \text{נתונה הפונקציה:}$$

$$f'\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 0 \quad \text{נתון:}$$

$$f'(x) = a \cdot 2 \sin x \cdot \cos x - b = a \sin 2x - b \quad (א)$$

$$f'\left(\frac{5\pi}{12}\right) = a \sin \frac{2 \cdot 5\pi}{12} - b = a \cdot \sin \frac{5\pi}{6} - b = \frac{1}{2}a - b$$

$$f'\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} - b = 0 \Rightarrow a = 2b \quad \text{לפי הנתון:}$$

$$a > 0, 0 \leq x \leq 2\pi \quad (ב)$$

$$f'(x) = a \sin 2x - b = 2b \sin 2x - b$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2b \sin 2x - b = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi n, \quad n, k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$$

בתחום $[0, 2\pi]$ נמצאות הנקודות החשודות לקיצון (כולל קצות התחום),

ששיעורי ה- x שלהם הם:

$$x = 0, \quad x = \frac{\pi}{12}, \quad x = \frac{5\pi}{12}, \quad x = \frac{13\pi}{12}, \quad x = \frac{17\pi}{12}, \quad x = 2\pi$$

נקבע את סוגן של נקודות הקיצון.

המשך בעמוד הבא <<<

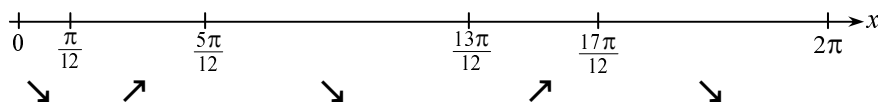
$$f'''(x) = 2a \cos 2x, a > 0$$

$$f'''(\frac{\pi}{12}) = 2a \cdot \cos \frac{\pi}{6} > 0 \Rightarrow \min$$

$$f'''(\frac{5\pi}{12}) = 2a \cos \frac{5\pi}{6} < 0 \Rightarrow \max$$

$$f'''(\frac{13\pi}{12}) = 2a \cos \frac{13\pi}{6} = 2a \cos \frac{\pi}{6} > 0 \Rightarrow \min$$

$$f'''(\frac{17\pi}{12}) = 2a \cos \frac{17\pi}{6} = 2a \cos \frac{5\pi}{6} < 0 \Rightarrow \max$$



שיעורי ה- x של נקודות המקסימום: $x = \frac{17\pi}{12}, x = \frac{5\pi}{12}, x = 0$

שיעורי ה- x של נקודות המינימום: $x = 2\pi, x = \frac{13\pi}{12}, x = \frac{\pi}{12}$

תחומי עלייה: $\frac{13\pi}{12} < x < \frac{17\pi}{12}, \frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$

תחומי ירידה: $\frac{17\pi}{12} < x \leq 2\pi, \frac{5\pi}{12} < x < \frac{13\pi}{12}, 0 \leq x < \frac{\pi}{12}$

$$y = ax^{\frac{2}{3}} + bx, y(8) = 4, y'(8) = 0 \quad (5) \text{ נתון:}$$

$$y'(x) = \frac{2}{3}ax^{-\frac{1}{3}} + b = \frac{2a}{3x^{\frac{1}{3}}} + b \quad (א)$$

על סמך הנתונים אפשר לקבל מערכת משוואות:

$$\begin{cases} a \cdot 8^{\frac{2}{3}} + 8b = 4 \\ \frac{2a}{3 \cdot 8^{\frac{1}{3}}} + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 8b = 4 \\ \frac{a}{3} + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 1 \\ a = -3b \end{cases}$$

$$-3b + 2b = 1 \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 3 \end{cases}$$

(ב) $x \geq 0$ (הבסיס אי-שלילי)

המשך בעמוד הבא <<<

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases} \quad (ג)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{אבל יש גם נקודת קיצון בקצה של התחום:}$$

לפי השוואת ערכי ה- y אפשר להסיק כי: $\max(8, 4)$, $\min(0, 0)$

(ד) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y : $x = 0 \Rightarrow y = 0$

נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x : $y = 0$

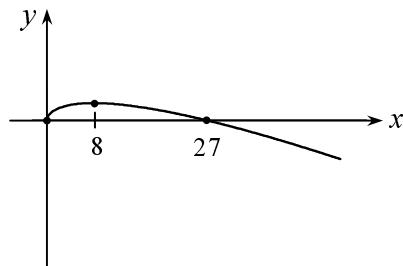
$$3\sqrt[3]{x^2} - x = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} (3 - \sqrt[3]{x}) = 0$$

$$\sqrt[3]{x^2} = 0 \quad \text{או} \quad 3 - \sqrt[3]{x} = 0$$

$$x = 0 \quad \text{או} \quad \sqrt[3]{x} = 3 \Rightarrow x = 27$$

$(0, 0)$, $(27, 0)$

סקיצה:



גבי יקואל

משוב צת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

♦ לכל הכיתות ♦ לכל השאלונים ♦ לכל הרמות