פתרון מבחן מס' 6 (ספר לימוד – שאלון 035805)

17-05-2017

(1) נתון: $S=2\ ,\ |q|<1$

בסדרה נתון כי כל איבר גדול פי 3 מסכום האיברים הבאים אחריו.

כלומר עבור כל n טבעי מתקיים: $a_n=3\cdot(S-S_n)$

עבור $n=1$ נקבל: $a_1=3(S-a_1)\ \Rightarrow\ a_1=3(2-a_1)$

$a_1=6-3a_1\ \Rightarrow\ a_1=\frac{3}{2}$

$S=2\ \Rightarrow\ \frac{a_1}{1-q}=2\ \Rightarrow\ \frac{\frac{3}{2}}{1-q}=2$

$1-q=\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ q=\frac{1}{4}$

הסדרה: $a_1^{\ 2}\ ,\ a_2^{\ 2}\ ,\ a_3^{\ 2}\ ,\ \ldots$ היא גם סדרה הנדסית אינסופית, שבה:

$A_1=a_1^{\ 2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

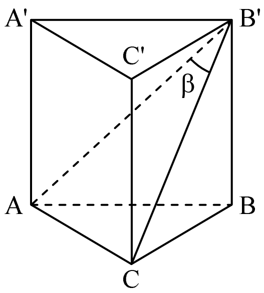
לכן זו סדרה הנדסית יורדת $Q=q^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}\ \Rightarrow\ 0<Q<1\ \Rightarrow$

סכום איברי הסדרה:

$$a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+\ldots=\frac{A_1}{1-Q}=\frac{\frac{9}{4}}{1-Q}=\frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{36}{15}=2.4$$

(2) נתון: $\measuredangle ACB=90^\circ\ ,\ AB=a\sqrt{2}$

$CA=CB\ ,\ \measuredangle CB'A=\beta$



קודם נוכיח כי $B'C\perp AC$ ($\measuredangle ACB'=90^\circ$).

$B'B$ מאונך למישור ABC (מנסרה ישרה),

לכן, $B'B\perp BC$.

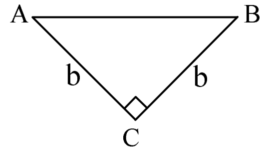
BC הוא היטל של משופע $B'C$ על המישור ABC .

$AC\perp CB$ (נתון)

$AC\perp B'C$ (לפי המשפט על שלושת האנכים: אם ישר במישור (AC) מאונך להיטל המשופע (BC) אז הוא מאונך גם למשופע ($B'C$).

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

(א) במשולש ישר-זווית ושווה-שוקיים ABC :

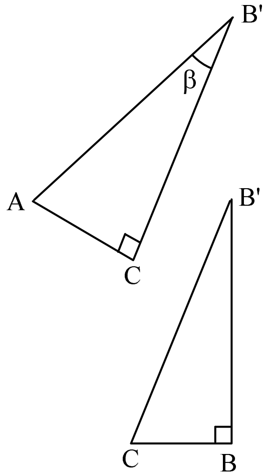


$$AC = BC = b$$

לפי משפט פיתגורס $AB^2 = AC^2 + CB^2$

$$(\sqrt{2}\,a)^2 = b^2 + b^2 \;\;\Rightarrow\;\; 2a^2 = 2b^2 \;\;\Rightarrow\;\; b = a$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$$



נתבונן ב- $\Delta ACB'$:

$$\tan\beta = \frac{AC}{CB'} \;\;\Rightarrow\;\; B'C = \frac{AC}{\tan\beta} = \frac{a}{\tan\beta}$$

נתבונן ב- $\Delta CBB'$:

לפי משפט פיתגורס :

$$B'B = \sqrt{B'C^2 - BC^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{\tan^2\beta} - a^2} = \frac{a}{\tan\beta} \cdot \sqrt{1 - \tan^2\beta}$$

לכן, נפח המנסרה :

$$V = S_{\Delta ABC} \cdot B'B = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{\tan\beta} \cdot \sqrt{1 - \tan^2\beta}$$

$V =$ יחידות נפח $\dfrac{a^3\sqrt{1 - \tan^2\beta}}{2\tan\beta}$

(ב) שטח מעטפת המנסרה : $M = (AB + AC + BC) \cdot BB' =$

$$= (\sqrt{2}\,a + a + a) \cdot \frac{a}{\tan\beta}\sqrt{1 - \tan^2\beta} =$$

$=$ יחידות שטח $\dfrac{a^2\,(2 + \sqrt{2})\,\sqrt{1 - \tan^2\beta}}{\tan\beta}$

(3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\ln^2 x+4}{\ln x}=\ln x+\frac{4}{\ln x}$.

(א) תחום ההגדרה: $x>0\ ,\ \ln x\neq 0$

$$\Downarrow$$

$$x>0\ ,\ x\neq 1$$

(ב) $f'(x)=\left(\ln x+\frac{4}{\ln x}\right)'=\frac{1}{x}-\frac{4}{\ln^2 x}\cdot(\ln x)'=$

$$=\frac{1}{x}-\frac{4}{x\ln^2 x}=\frac{\ln^2 x-4}{x\ln^2 x}$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{\ln^2 x-4}{x\ln^2 x}=0\ \Rightarrow\ \ln^2 x-4=0$$

$\ln x=2$ או $\ln x=-2$

$$\begin{cases}x=e^2\\ y=\ln e^2+\frac{4}{\ln e^2}=2+2=4\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x=\frac{1}{e^2}\\ y=\ln e^{-2}+\frac{4}{\ln e^{-2}}=-2-2=-4\end{cases}$$

x	$0<x<e^{-2}$	$x=e^{-2}$	$e^{-2}<x<1$	$x=1$	$1<x<e^2$	$x=e^2$	$x>e^2$
y'	+	0	−	נקודת אי-הגדרה	−	0	+
y	↗	**max**	↘		↘	**min**	↗

נקודות חשודות לקיצון: $\left(e^2,4\right)$ ו- $(e^{-2},-4)$

מילוי הטבלה הנ"ל נעשה על-ידי החישובים הבאים:

$$f'(e^{-3})=\frac{9-4}{e^{-3}\cdot(-3)^2}>0$$

$$f'(e^{-1})=\frac{1-4}{e^{-1}\cdot(-1)^2}<0$$

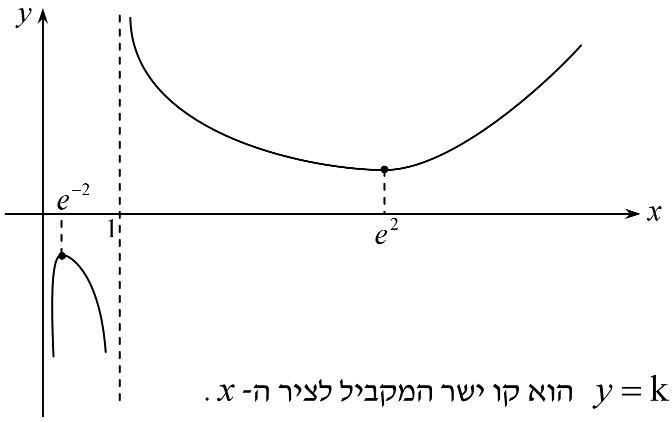
$$f'(e)=\frac{1-4}{e\cdot(1)^2}<0$$

$$f'(e^3)=\frac{9-4}{e^3\cdot 3^2}>0$$

כלומר: $\max\left(e^{-2},-4\right)\ ,\ \min\left(e^2\ ,\ 4\right)$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

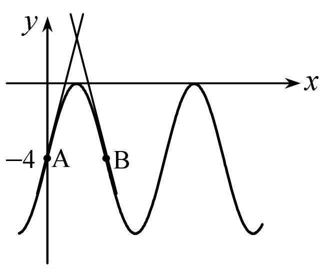
(ג) סקיצה:



(ד) גרף הפונקציה $y = \mathrm{k}$ הוא קו ישר המקביל לציר ה- x.
על סמך גרף הפונקציה הנתונה (בסעיף (ג)),
אפשר להגיד שלישר $y = \mathrm{k}$ ולגרף הפונקציה אין נקודות משותפות,
אם $f_{\max}(x) < \mathrm{k} < f_{\min}(x)$. כלומר כאשר $-4 < \mathrm{k} < 4$.

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = 4\sin x - 4$.

(א) יש למצוא קודם את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות A ו- B.



$$x_{\mathrm{A}} = 0 \ , \ x_{\mathrm{B}} = \pi$$
$$x_{\mathrm{A}} = 0 \ \Rightarrow \ y_{\mathrm{A}} = 4\sin 0 - 4 = -4$$
$$x_{\mathrm{B}} = \pi \ \Rightarrow \ y_{\mathrm{B}} = 4\sin \pi - 4 = -4$$
$$f'(x) = 4\cos x$$
$$\mathrm{m_A} = 4\cos 0 = 4 \ , \ \mathrm{m_B} = 4\cos \pi = -4$$

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A:

$$y + 4 = 4(x - 0) \ \Rightarrow \ y = 4x - 4$$

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה B:

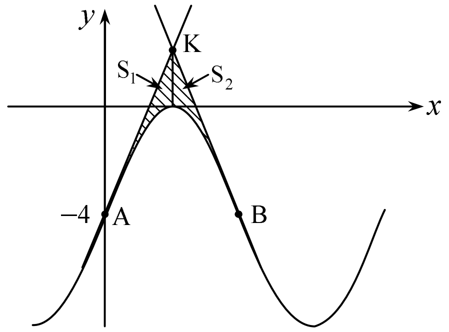
$$y + 4 = -4(x - \pi) \ \Rightarrow \ y = -4x + 4\pi - 4$$

למציאת שיעור ה- x של נקודת החיתוך שבין שני המשיקים

נפתור את המשוואה:

$$4x - 4 = -4x + 4\pi - 4$$
$$8x = 4\pi \ \Rightarrow \ x = \frac{\pi}{2}$$

המשך בעמוד הבא ▸▸▸



(ב) K – נקודת החיתוך של המשיקים.
נחלק את השטח המבוקש
(המקווקו) לשני חלקים על-ידי
העברת אנך מנקודה K לציר ה- x.

$$x_K = \frac{\pi}{2}$$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[4x - 4 - (4\sin x - 4)\right] dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4x - 4\sin x\right) dx = \left(2x^2 + 4\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 4\cos\frac{\pi}{2} - \left(0 + 4\cos 0\right) = \frac{\pi^2}{2} + 0 - 4 =$$

$= \frac{\pi^2}{2} - 4$ יחידות שטח

$$S_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[-4x + 4\pi - 4 - (4\sin x - 4)\right] dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-4x + 4\pi - 4\sin x\right) dx = \left(-2x^2 + 4\pi x + 4\cos x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= -2\pi^2 + 4\pi\cdot\pi + 4\cos\pi - \left[-2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 4\pi\cdot\frac{\pi}{2} + 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$= \cancel{2\pi^2} - 4 + \frac{\pi^2}{2} \cancel{-2\pi^2} + 0 = \frac{\pi^2}{2} - 4$ יחידות שטח

מכאן:

$S_{\text{מבוקש}} = S_1 + S_2 = \frac{\pi^2}{2} - 4 + \frac{\pi^2}{2} - 4 = \pi^2 - 8 \approx 1.87$ יחידות שטח

(5) $f(x)=x^{\mathrm{n}}e^{-\mathrm{k}x}$, $\mathrm{n}=2\mathrm{p}$, p טבעי, $\mathrm{k}\neq 0$.

בעצם, צריך למצוא את ערך הפונקציה בנקודות המינימום והמקסימום שלה.

$$f'(x)=\mathrm{n}x^{\mathrm{n}-1}\cdot e^{-\mathrm{k}x}+x^{\mathrm{n}}\cdot(-\mathrm{k})e^{-\mathrm{k}x}=x^{\mathrm{n}-1}\cdot e^{-\mathrm{k}x}(\mathrm{n}-\mathrm{k}x)$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x^{\mathrm{n}-1}e^{-\mathrm{k}x}(\mathrm{n}-\mathrm{k}x)=0$$

$x=0$ או $e^{-\mathrm{k}x}=0$ או $\mathrm{n}-\mathrm{k}x=0$

אין פתרון, $x=\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$, $(\mathrm{k}\neq 0)$

כי $e^{-\mathrm{k}x}>0$ לכל ערך של x .

עבור $x=0$: $f(0)=0^{\mathrm{n}}\cdot e^{0}=0$

$x^{\mathrm{n}}\geq 0$ לכל x מכיוון ש- n זוגי.

$e^{-\mathrm{k}x}>0$ לכל x .

לכן, $f(x)=x^{\mathrm{n}}\cdot e^{-\mathrm{k}x}\geq 0$ לכל x .

מכאן, שעבור $x=0$ הפונקציה $f(x)$ מקבלת מינימום שערכו 0 .

עבור $x=\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$: $f\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\right)=\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{n}}\cdot e^{-\mathrm{n}}=\frac{\mathrm{n}^{\mathrm{n}}}{\mathrm{k}^{\mathrm{n}}e^{\mathrm{n}}}=\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}e}\right)^{\mathrm{n}}$

נראה שהפונקציה מקבלת ערך מקסימלי עבור $x=\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$,

ואז ההפרש בין ערך הפונקציה בנקודת המקסימום לערך הפונקציה בנקודת המינימום שווה ל- $\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}e}\right)^{\mathrm{n}}$.

$$f'(x)=x^{\mathrm{n}-1}e^{-\mathrm{k}x}(\mathrm{n}-\mathrm{k}x)=e^{-\mathrm{k}x}\cdot\left(\mathrm{n}x^{\mathrm{n}-1}-\mathrm{k}x^{\mathrm{n}}\right)$$

$$f''(x)=(-\mathrm{k})e^{-\mathrm{k}x}(\mathrm{n}x^{\mathrm{n}-1}-\mathrm{k}x^{\mathrm{n}})+e^{-\mathrm{k}x}\left[\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)x^{\mathrm{n}-2}-\mathrm{kn}\,x^{\mathrm{n}-1}\right]=$$
$$=e^{-\mathrm{k}x}\cdot x^{\mathrm{n}-2}\left[-\mathrm{kn}x+\mathrm{k}^2x^2+\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)-\mathrm{kn}x\right]$$

$$f''\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\right)=e^{-\mathrm{k}\cdot\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}}\cdot\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{n}-2}\left[-\mathrm{kn}\cdot\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}+\mathrm{k}^2\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\right)^2+\mathrm{n}^2-\mathrm{n}-\mathrm{kn}\cdot\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\right]=$$
$$=e^{-\mathrm{n}}\cdot\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{n}-2}\left[-\mathrm{n}^2+\mathrm{n}^2+\mathrm{n}^2-\mathrm{n}-\mathrm{n}^2\right]=e^{-\mathrm{n}}\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{n}-2}(-\mathrm{n})$$

$e^{-\mathrm{n}}>0$ לכל n .

אם n זוגי, הרי שגם $\mathrm{n}-2$ זוגי ולכן: $\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{n}-2}>0$ לכל n .

$-\mathrm{n}<0$ לכל n זוגי. לכן: $f''\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\right)<0$

כלומר, הפונקציה מקבלת ערך מקסימלי כאשר $x=\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$ ולכן, ההפרש המבוקש:

$$y_{\text{מקסימום}}-y_{\text{מינימום}}=\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{n}}\cdot e^{-\mathrm{n}}-0=\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{n}}\cdot\frac{1}{e^{\mathrm{n}}}=\left(\frac{\mathrm{n}}{e\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{n}}$$

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות