

פתרון מבחן מס' 3 (ספר לימוד – שאלון 035805)

17-05-2017

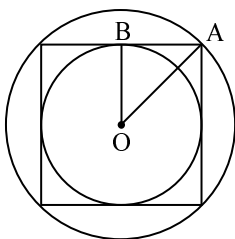
(1) נוכיח שסדרת השטחים של העיגולים היא סדרה הנדסית אינסופית יורדת.

ניקח מעגל כלשהו, המעגל ה- n . במעגל זה חסום ריבוע

והמעגל ה- $(n+1)$ חסום בריבוע זה.

מרכזי שני המעגלים ונקודת חיתוך

אלכסוני הריבועים מתלכדים (הנקודה O).



$$OA = R_n, \quad OB = R_{n+1}$$

$$OB = AB \quad (\text{חצי צלע הריבוע})$$

לפי משפט פיתגורס ב- ΔAOB :

$$AO^2 = OB^2 + AB^2$$

$$R_n^2 = R_{n+1}^2 + R_{n+1}^2 \Rightarrow R_n^2 = 2 \cdot R_{n+1}^2$$

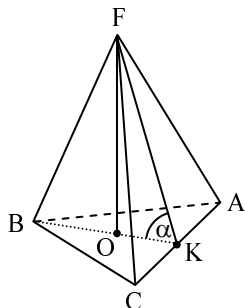
$$\frac{R_{n+1}^2}{R_n^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

כלומר סדרת הרדיוסים של המעגלים היא סדרה הנדסית שמנתה $q = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$,

כלומר שהסדרה יורדת ובה $R_1 = R$, ואז :

$$S_{\text{עיגול}} = \pi R^2$$

$$S_{\text{סכום שטחי העיגולים}} = \pi \cdot (R^2 + R_1^2 + R_2^2 + \dots) = \pi \cdot \frac{R^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi R^2$$



(2) נתון: $AB = AC = BC = 7$ ס"מ ,

$FA = FB = FC = 13$ ס"מ .

נעביר תיכון לצלע AC ב- ΔFAC (KF) .

במשולש שווה-שוקיים FAC , תיכון לבסיס

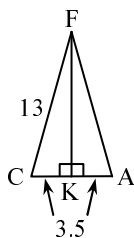
הוא גם גובה לבסיס, כלומר $FK \perp AC$.

נחבר את הנקודות B ו-K .

במשולש שווה-צלעות ABC , התיכון BK הוא גם גובה, כלומר $BK \perp AC$,

הזווית המבוקשת בין הגובה לבסיס בפאה צדדית לבין בסיס הפירמידה

היא $\sphericalangle BKF$.



ב- ΔACF : $CK = AK = \frac{1}{2}AC = 3.5$ ס"מ

לפי משפט פיתגורס: $13^2 = 3.5^2 + FK^2$

כלומר: $FK = \sqrt{13^2 - 3.5^2} = \sqrt{156.75}$ ס"מ

לפי משפט פיתגורס ב- ΔABK : $BK = \sqrt{7^2 - 3.5^2} = \sqrt{36.75}$ ס"מ

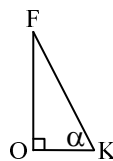
גובה הפירמידה FO , כאשר O מרכז המעגל החוסם את ΔABC .

כלומר O היא נקודת חיתוך האנכים האמצעיים (וגם התיכונים) ב- ΔABC .

(נקודת מפגשים התיכונים מחלקת כל תיכון $OK = \frac{1}{3} \cdot BK = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{36.75}$)

ביחס 2:1) .

$$\cos \alpha = \frac{OK}{FK} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \sqrt{36.75}}{\sqrt{156.75}} \Rightarrow \alpha \approx 80.7^\circ$$



ב- ΔFOK :

(3) הסכום שהצטבר אחרי 8 שנים: $12,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^8$ ש"ח

אחרי משיכה של 7,000 ש"ח, נשאר בחשבון:

$$12,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^8 - 7,000$$

ואחרי 8 שנים נוספות, היו בחשבון:

$$[12,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^8 - 7,000] \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^8$$

על סמך הנתון בשאלה ועם הסימון: $x = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^8$, נקבל את המשוואה:

$$(12,000x - 7,000) \cdot x = 34,000 \quad /:1,000$$

$$(12x - 7) \cdot x = 34 \Rightarrow 12x^2 - 7x - 34 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 1,632}}{24} = \frac{7 \pm 41}{24} \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -1\frac{5}{12}$$

מכיוון ש- $x > 0$, הרי ש- $x = 2$, ואז:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^8 = 2 \Rightarrow 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[8]{2} \quad / \cdot 100$$

$$100 + p = 100 \cdot \sqrt[8]{2} \Rightarrow p = 100 \sqrt[8]{2} - 100 = 9.05$$

(4) נמצא את שיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה והישר $y = 1$:

$$1 = \frac{1}{3x-2} \Rightarrow 3x-2=1 \Rightarrow x=1$$

$$S = \int_1^4 \left(1 - \frac{1}{3x-2}\right) dx = \left(x - \frac{1}{3} \ln|3x-2|\right) \Big|_1^4 =$$

$$= \left[4 - \frac{1}{3} \ln(12-2)\right] - \left[1 - \frac{1}{3} \ln(3-2)\right] =$$

$$= 4 - \frac{1}{3} \ln 10 - 1 = 2.23 \text{ יחידות שטח}$$

$$x=0 \Rightarrow f(0) = 2 \cos 0 - \frac{8}{3} \cos^3 0 = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3} \quad (\text{א}) \quad (5)$$

$$y=0 \Rightarrow 2 \cos x - \frac{8}{3} \cos^3 x = 0 \Rightarrow 2 \cos x \left(1 - \frac{4}{3} \cos^2 x\right) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \text{או} \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{או} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{כלומר:}$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} \quad \text{בתחום הנתון נקבל:}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{6}, \quad x_4 = -\frac{\pi}{6} \quad \text{בתחום הנתון נקבל:}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

אין פתרונות למשוואה זו בתחום הנתון $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

כלומר נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים:

$$\cdot \left(0, -\frac{2}{3}\right), \left(\pm \frac{\pi}{6}, 0\right), \left(\pm \frac{\pi}{2}, 0\right)$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$f'(x) = -2\sin x + 8\cos^2 x \cdot \sin x \quad (\text{ב})$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sin x(4\cos^2 x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{או} \quad \cos x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 0 \Rightarrow \text{מינימום מוחלט } \left(0, -\frac{2}{3}\right) \quad \text{בתחום הנתון נקבל:}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{מקסימום מוחלט } \left(\pm \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad \text{בתחום הנתון נקבל:}$$

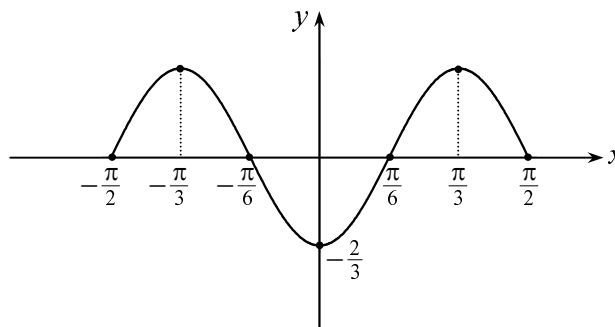
$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

אין פתרונות למשוואה זו בתחום הנתון $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

יש גם נקודות קיצון בקצה:

$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ מינימום מקומי, $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ מינימום מקומי.

(ג)



גבי יקואל

מ ש ב צ ת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות