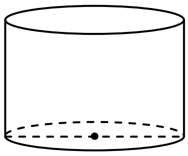
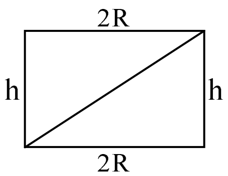
פתרון מבחן מס' 22 (ספר לימוד – שאלון 035804)

09-05-2017





(1) נסמן: R – רדיוס הבסיס, h – גובה הגליל ($2R > h$).

(א)
$$\begin{cases} 2R \cdot h = 35 \\ \sqrt{(2R)^2 + h^2} = \sqrt{74} \quad \text{(לפי משפט פיתגורס)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = \frac{35}{2R} \\ 4R^2 + h^2 = 74 \end{cases}$$

$$4R^2 + \frac{1{,}225}{4R^2} = 74$$

נסמן: $R^2 = t$:
$$4t + \frac{1{,}225}{4t} = 74 \quad \Rightarrow \quad 16t^2 - 296t + 1{,}225 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{296 \pm 96}{32} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 12.25 \;,\; t_2 = 6.25$$

$$R^2 = 12.25 \quad \Rightarrow \quad R = 3.5 \text{ מטר} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{35}{2 \cdot 3.5} = 5 \text{ מטר}$$

$$R^2 = 6.25 \quad \Rightarrow \quad R = 2.5 \text{ מטר} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{35}{2 \cdot 2.5} = 7 \text{ מטר}$$

נתון כי $2R > h$, לכן הפתרון $R = 2.5$ מטר נפסל.

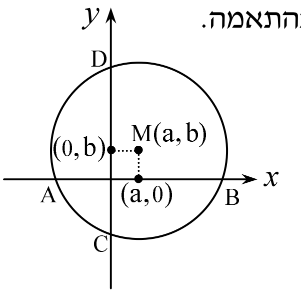
תשובה: גובה המיכל הוא 5 מטרים.

(ב)
$$V_{\text{גליל}} = \pi R^2 h = \pi \cdot 3.5^2 \cdot 5 = 61.25\pi \approx 192.42 \text{ מ"ק}$$

(ג)
$$M = \underbrace{2\pi Rh}_{\text{שטח מעטפת}} \cdot 6 + \underbrace{\pi R^2}_{\text{שטח בסיס}} \cdot 4 = 12\pi \cdot 3.5 \cdot 5 + 4\pi \cdot 3.5^2 =$$

$$= 259\pi \approx 813.67 \text{ ש"ח}$$

(2) (א) נעביר אנכים מהנקודה M לצירים x ו- y



החותכים את הצירים בנקודות $(a,0)$, $(0,b)$ בהתאמה.

רדיוס המאונך למיתר חוצה אותו,

לכן הנקודה $(a,0)$ היא נקודת אמצע AB

והנקודה $(0,b)$ היא נקודת אמצע DC .

לפי נוסחת שיעורי אמצע קטע:

$$\begin{cases} a = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-2+4}{2} = 1 \\ b = \dfrac{y_C + y_D}{2} = \dfrac{-2+4}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad M(1,1)$$

$$R = AM = \sqrt{(1+2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$$

משוואת המעגל: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$

(ב) (i) הנקודה $M(1,1)$ נמצאת על הישר ℓ , כלומר שיעורי הנקודה

מקיימים את משוואת הישר: $1-(4k-1)\cdot 1+2=0$

$$4-4k=0 \quad \Rightarrow \quad k=1$$

(ii) שיפוע הישר ℓ :

$$y-(4\cdot 1-1)x+2=0 \quad \Rightarrow \quad y=3x-2 \quad \Rightarrow \quad m_\ell = 3$$

שיפוע הרדיוס לנקודה B : $m_{MB} = \dfrac{y_B - y_M}{x_B - x_M} = \dfrac{0-1}{4-1} = -\dfrac{1}{3}$

רדיוס לנקודת השקה מאונך למשיק,

לכן שיפוע המשיק למעגל בנקודה B :

$$m_B \cdot m_{MB} = -1 \quad \Rightarrow \quad m_B \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad m_B = 3$$

שיפוע הרדיוס לנקודה C : $m_{MC} = \dfrac{y_C - y_M}{x_C - x_M} = \dfrac{-2-1}{0-1} = 3$

$$m_C \cdot m_{MC} = -1 \quad \Rightarrow \quad m_C \cdot 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad m_C = -\tfrac{1}{3}$$

$m_B = m_\ell = 3 \quad \Rightarrow$ משיק בנקודה B $\parallel \ell$

$m_C \cdot m_B = -\tfrac{1}{3} \cdot 3 = -1 \quad \Rightarrow$ משיק בנקודה B $\perp$ משיק בנקודה C

(3)

	רמי		דליה		סמי	
	גברים	נשים	גברים	נשים	גברים	נשים
תומכים	320	80	60	180	300	260

בסך הכול השתתפו בסקר :

$320+80+60+180+300+260=$ אנשים $1{,}200$

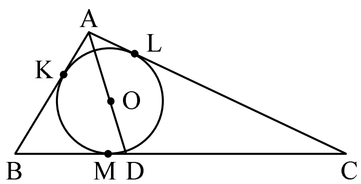
(א) $P(\text{תומך/ת בדליה})=\frac{180+60}{1{,}200}=\frac{240}{1{,}200}=\frac{1}{5}$

(ב) $P(\text{תומך/ת בדליה / נבחרה אישה})=\frac{180}{180+60}=\frac{180}{240}=\frac{3}{4}$

(ג) $P(\text{נבחר גבר / תומך בסמי})=\frac{300}{300+60+320}=\frac{300}{680}=\frac{15}{34}$

(ד) $P(\text{אינו תומך/ת בדליה / גבר התומך בסמי})=$

$=\frac{300}{1{,}200-(180+60)}=\frac{300}{960}=\frac{5}{16}$



(4) (א) נתון : $AL=$ 3 ס״מ ,

$BK=$ 6 ס״מ , $BD=$ 7 ס״מ .

$AK=AL=$ 3 ס״מ

$BK=BM=$ 6 ס״מ

$CL=CM=$ a ס״מ

(שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה).

$MD=BD-BM$ (חיסור קטעים)

$MD=7-6=$ 1 ס״מ (הצבה)

$DC=CM-MD=$ $a-1$ ס״מ (חיסור קטעים, הצבה)

AD הוא חוצה-זווית A , כי מרכז המעגל החסום במשולש נמצא בנקודת חיתוך חוצי הזוויות.

לפי משפט חוצה-זווית : $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{9}{3+a}=\frac{7}{a-1}$

$21+7a=9a-9 \Rightarrow 30=2a \Rightarrow CL=a=$ 15 ס״מ

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ב) לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \measuredangle A$$

$$21^2 = 9^2 + 18^2 - 2 \cdot 9 \cdot 18 \cdot \cos \measuredangle A$$

$$\cos \measuredangle A = \frac{81+324-441}{324} = -\frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle A = 96.38°$$

(ג) $OK \perp AK$ (רדיוס לנקודת השקה מאונך למשיק)

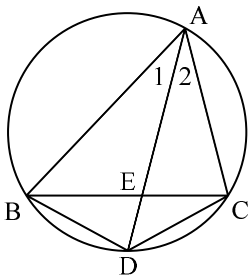
$$\measuredangle KAD = \frac{1}{2}\measuredangle A = \frac{1}{2} \cdot 96.38° = 48.19°$$

ב- ΔAKO : $KO = r = AK \tan \measuredangle KAO = 3 \tan 48.19° \approx 3.354$ ס"מ

(5) AE חוצה-זווית $\measuredangle BAC$, לכן: $\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$,

כלומר $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC}$, וגם: $BD = DC$

(לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים)



(א) לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔADC :

$$DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos \measuredangle A_2$$

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔABD :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \measuredangle A_1$$

נסמן: $\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2 = \alpha$ ובעזרת $BD = DC$ נקבל:

$$AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos\alpha = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\alpha$$

$$36 - 96\cos\alpha = 64 - 128\cos\alpha$$

$$32\cos\alpha = 28 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{28}{32} = \frac{7}{8} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 28.955°$$

$$\measuredangle BAC = 2\alpha = 2 \cdot 28.955° = 57.91°$$

(ב) לפי משפט הקוסינוסים ב ΔABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \measuredangle A$$

$BC^2 = 64 + 36 - 96 \cdot 0.53125 = 49 \quad \Rightarrow \quad BC = 7$ ס"מ

(ג) $S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \sin \measuredangle A = \frac{8 \cdot 6}{2} \sin 57.91° \approx 20.33$ סמ"ר

(ד) לפי משפט הסינוסים ב- ΔABC : $\frac{BC}{\sin \measuredangle A} = 2R$

$R = \frac{BC}{2\sin \measuredangle A} = \frac{7}{2 \cdot \sin 57.91°} \approx 4.13$ ס"מ

(6) (א) $\measuredangle B = \measuredangle C = 60°$ (במשולש מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות
+ סכום זוויות במשולש שווה $180°$)

$\measuredangle KMB = \measuredangle C = 60°$ (זוויות מתאימות שוות בין מקבילים)

לכן ΔBMK הוא משולש שווה-צלעות (כל זוויותיו בנות $60°$).

בדרך דומה, ΔCML הוא משולש שווה-צלעות.

$\measuredangle KMB = \measuredangle LMC = 60°$

$\measuredangle KML = 180° - 60° - 60° = 60°$

נסמן: a ס״מ $= KM = MB = BK$ ואז:

$MC = ML = LC =$ ס״מ $2.75 - a$

נתון כי: $\frac{7\sqrt{3}}{16}$ סמ״ר $= S_{\Delta KLM}$, מכאן: $\frac{MK \cdot ML}{2} \sin \measuredangle KML = \frac{7\sqrt{3}}{16}$

$$\frac{a(2.75-a)}{2}\sin 60° = \frac{7\sqrt{3}}{16} \quad / \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad a(2.75-a)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{8} \quad / \cdot \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$11a - 4a^2 = 7 \quad \Rightarrow \quad 4a^2 - 11a + 7 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{11 \pm 3}{8} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1.75 \ , \ a_2 = 1$$

נשתמש במשפט הקוסינוסים ב- ΔKML:

$$KL^2 = KM^2 + LM^2 - 2 \cdot KM \cdot LM \cdot \cos 60°$$

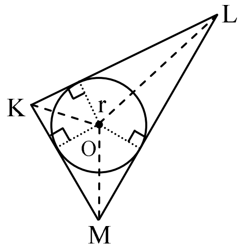
$$KL^2 = 1^2 + 1.75^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1.75 \cdot \cos 60° = 2.3125$$

$KL \approx$ ס״מ 1.521

הערה: לא חשוב באיזה ערך של a נבחר, בשני המקרים נקבל את אותו הפתרון.

(ב) לפי משפט הסינוסים ב- ΔKML:

$$\frac{KL}{\sin 60°} = 2R \quad \Rightarrow \quad R_{\text{מעגל חוסם}} = \frac{KL}{2\sin 60°} = \frac{1.521}{\sqrt{3}} = \text{ס״מ } 0.87815$$



נבטא את שטח ΔKLM באמצעות רדיוס המעגל החסום בו r:

$$S = S_{\Delta KLO} + S_{\Delta MLO} + S_{\Delta KMO}$$

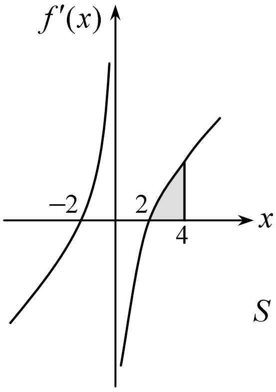
המשך בעמוד הבא ➤➤➤

$$S=\frac{\mathrm{r}\cdot\mathrm{KL}}{2}+\frac{\mathrm{r}\cdot\mathrm{ML}}{2}+\frac{\mathrm{r}\cdot\mathrm{MK}}{2}$$

$$S=\frac{\mathrm{r}}{2}\cdot(\mathrm{KL}+\mathrm{ML}+\mathrm{MK})$$

$$\frac{7\sqrt{3}}{16}=\frac{\mathrm{r}}{2}\cdot(1.521+1.75+1)\quad\Rightarrow\quad \mathrm{r}=\text{0.354845 ס"מ}$$

$$\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}}=\frac{0.354845}{0.87815}\approx 0.4041$$



(7) (א) $f'(x)=\mathrm{b}x-\frac{\mathrm{k}}{x^3}=\mathrm{b}x-\mathrm{k}x^{-3}$

תחום ההגדרה של $f'(x)$: $x\neq 0$.

(ב) מהגרף נסיק: $f'(2)=0$

ואז: $2\mathrm{b}-\frac{\mathrm{k}}{8}=0\quad\Rightarrow\quad \mathrm{k}=16\mathrm{b}$.

(ג) $$S=4.5=\int_2^4 f'(x)\,dx=\int_2^4\left(\mathrm{b}x-\frac{16\mathrm{b}}{x^3}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{\mathrm{b}x^2}{2}+\frac{8\mathrm{b}}{x^2}\right)\Bigg|_2^4=8\mathrm{b}+\frac{\mathrm{b}}{2}-(2\mathrm{b}+2\mathrm{b})=4.5\mathrm{b}$$

$$4.5\mathrm{b}=4.5\quad\Rightarrow\quad\mathrm{b}=1\quad\Rightarrow\quad\mathrm{k}=16$$

(ד) $$f'(-x)=\mathrm{b}(-x)-\frac{\mathrm{k}}{(-x)^3}=-\mathrm{b}x+\frac{\mathrm{k}}{x^3}=-\left(\mathrm{b}x-\frac{\mathrm{k}}{x^3}\right)=-f'(x)$$

לכל x מתחום ההגדרה מתקיים: $f'(-x)=-f'(x)$,

לכן $f'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

(ה) $$f(x)=\int f'(x)\,dx=\frac{\mathrm{b}x^2}{2}+\frac{8\mathrm{b}}{x^2}+\mathrm{C}=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^2}+\mathrm{C}$$

לפי הגרף של $f'(x)$ נסיק שלפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון:

$$x=2\quad\Rightarrow\quad f(2)=\frac{4}{2}+\frac{8}{4}+\mathrm{C}=4\quad\Rightarrow\quad\mathrm{C}=0$$

$$x=-2\quad\Rightarrow\quad f(-2)=\frac{4}{2}+\frac{8}{4}+\mathrm{C}=4\quad\Rightarrow\quad\mathrm{C}=0$$

כלומר: $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^2}$.

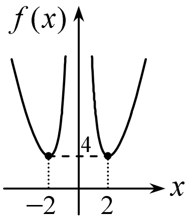
המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ו) $f(-x)=\frac{(-x)^2}{2}+\frac{8}{(-x)^2}=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^2}=f(x)$

לכל x מתחום ההגדרה מתקיים: $f(-x)=f(x)$,

לכן $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

סקיצה של גרף הפונקציה:



(ז) $\int_2^3[f(x)-f'(x)]dx=\int_2^3\left(\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^2}-x+\frac{16}{x^3}\right)dx=$

$=\left(\frac{x^3}{6}-\frac{8}{x}-\frac{x^2}{2}-\frac{8}{x^2}\right)\Big|_2^3=\frac{27}{6}-\frac{8}{3}-\frac{9}{2}-\frac{8}{9}-\left(\frac{8}{6}-\frac{8}{2}-\frac{4}{2}-\frac{8}{4}\right)=$

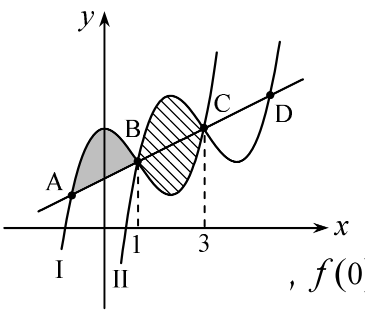
$=-3\frac{5}{9}-\left(-6\frac{2}{3}\right)=3\frac{1}{9}=\frac{28}{9}$

(8) (א) נתון: $f(x)=x^3-\text{k}x^2+6$

$g(x)=x^3-3\text{k}x^2+8\text{k}x-12$

$y=\text{m}x+\text{k}$

$x_\text{B}=1\ ,\ x_\text{C}=3$



עבור $x=0$ נקבל: $g(0)=-12$, $f(0)=6$,

לכן לפי נקודות החיתוך של הגרפים עם ציר ה- y ,

גרף I מתאים ל- $f(x)$ וגרף II מתאים ל- $g(x)$.

(ב) $x_\text{B}=1\ \Rightarrow\ f(1)=g(1)\ \Rightarrow\ 1-\text{k}+6=1-3\text{k}+8\text{k}-12$

$7-\text{k}=5\text{k}-11\ \Rightarrow\ \text{k}=3$

כמו כן: $f(1)=y(1)$, לכן: $1-3+6=\text{m}+3\ \Rightarrow\ \text{m}=1$

(ג) הנקודות C , B , A הן נקודות החיתוך של הישר עם גרף הפונקציה $f(x)$

ולכן למציאת שיעוריהן יש לפתור את המשוואה:

$f(x)=y\ \Rightarrow\ x^3-3x^2+6=x+3\ \Rightarrow\ x^3-3x^2-x+3=0$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$x^2(x-3)-1(x-3)=0 \;\Rightarrow\; (x-3)(x^2-1)=0$$

כלומר:
$$x^2-1=0 \;\Rightarrow\; x=\pm 1$$
$$x-3=0 \;\Rightarrow\; x=3$$

ואז:
$$x_A=-1 \;\Rightarrow\; y_A=-1+3=2 \;\Rightarrow\; A(-1,2)$$
$$x_B=1 \;\Rightarrow\; y_B=1+3=4 \;\Rightarrow\; B(1,4)$$
$$x_C=3 \;\Rightarrow\; y_C=3+3=6 \;\Rightarrow\; C(3,6)$$

(ד)
$$S=\int_1^3 (x^3-9x^2+24x-12-x^3+3x^2-6)\,dx=$$
$$=\int_1^3(-6x^2+24x-18)\,dx=\left(\frac{-6x^3}{3}+\frac{24x^2}{2}-18x\right)\Big|_1^3=$$
$$=(-2\cdot 27+12\cdot 9-18\cdot 3)-(-2+12-18)=$$
$=0-(-8)=$ 8 יחידות שטח

(ה)
$$S=\int_{-1}^1 (x^3-3x^2+6-x-3)\,dx=\int_{-1}^1(x^3-3x^2-x+3)\,dx=$$
$$=\left(\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_{-1}^1=\left(\frac14-1-\frac12+3\right)-\left(\frac14+1-\frac12-3\right)=$$
$=1\frac34-\left(-2\frac14\right)=$ 4 יחידות שטח

(9) (א)
$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-x-2}=\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}$$

תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא: $x\neq -1\ ,\ 2$, והאסימפטוטות האנכיות הן $x=-1$, $x=2$, ולכן גרפים III ו- V אינם מתאימים.

$f(0)=\frac{-1}{-2}=\frac12$, כלומר $\left(0,\frac12\right)$ היא נקודת החיתוך עם ציר ה- y ,

ולכן גם גרף I , החותך את ציר ה- y בחלקו השלילי, אינו מתאים.

$f(3)=\frac{2}{4\cdot 1}=\frac12$, כלומר $\left(3,\frac12\right)$ היא נקודה על גרף הפונקציה,

לכן גרף IV אינו מתאים, והגרף המתאים הוא גרף II .

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ב) נתון: $g(x)=-f(x)$, כלומר הגרף $g(x)$ הוא סימטרי לגרף של $f(x)$ סביב ציר ה- x . בסעיף (א) ראינו כי גרף II מתאים ל- $f(x)$, לכן גרף I מתאים לפונקציה $g(x)$.

(ג) על סמך גרף II (הגרף של $f(x)$):

$f'(x)>0$ כאשר $f(x)$ עולה, וזה אינו מתקיים.

$f'(x)<0$ כאשר $f(x)$ יורדת, כלומר בתחומים:

$x<-1\ ,\ -1<x<2\ ,\ x>2$

(ד) נקודת השקה: $x=0 \ \Rightarrow\ f(0)=\frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \left(0,\frac{1}{2}\right)$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-x-2)-(x-1)\,(2x-1)}{(x^2-x-2)^2}=$$

$$=\frac{x^2-x-2-2x^2+3x-1}{(x^2-x-2)^2}=\frac{-x^2+2x-3}{(x^2-x-2)^2}$$

$$\mathrm{m}_{\text{משיק}}=f'(0)=-\frac{3}{4}$$

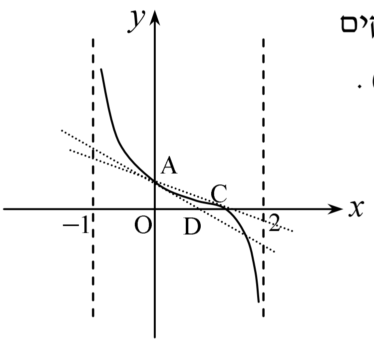
משוואת המשיק: $y-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}(x-0) \ \Rightarrow\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$

(ה) נקודת השקה: $x=1 \ \Rightarrow\ f(1)=0 \ \Rightarrow\ (1,0)$

$$\mathrm{m}_{\text{משיק}}=f'(1)=\frac{-1+2-3}{(1-1-2)^2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

משוואת המשיק: $y-0=-\frac{1}{2}(x-1) \ \Rightarrow\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

(ו) נסרטט את הגרף של $f(x)$ ואת שני המשיקים שאת משוואותיהם מצאנו בסעיפים (ד) ו- (ה) .
שני המשיקים עוברים בנקודה $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$.
נבדוק בתחום $0<x<1$ את ערכי הפונקציה והמשיקים:



המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2}=\frac{2}{9}$$

משיק ב- $\left(0,\frac{1}{2}\right)$: $y\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

משיק ב- $\left(1,0\right)$: $y\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

כלומר המשיק ב- $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ נמצא מתחת לגרף הפונקציה בתחום $0<x<1$

והמשיק ב- $\left(1,0\right)$ נמצא מעל גרף הפונקציה באותו תחום.

לכן: $S_{\Delta\,\mathrm{AOD}}<\int_0^1 f(x)\,dx<S_{\Delta\,\mathrm{AOC}}$, כלומר:

$$\frac{\mathrm{AO}\cdot\mathrm{OC}}{2}>\int_0^1\frac{x-1}{x^2-x-2}dx>\frac{\mathrm{AO}\cdot\mathrm{OD}}{2}$$

$$y_{\mathrm{C}}=0\quad\Rightarrow\quad x_{\mathrm{C}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$$

$$y_{\mathrm{D}}=0\quad\Rightarrow\quad x_{\mathrm{D}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

כלומר:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{2}=\frac{1}{4}>\int_0^1\frac{x-1}{x^2-x-2}dx>\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{6}$$