פתרון מבחן מס' 21 (ספר לימוד – שאלון 035804)

09-05-2017

(1) (א) נסמן ב- t שעות את משך הנסיעה של שני הרוכבים.

נסמן ב- C את הנקודה אליה הגיע הרוכב הראשון

וב- D את הנקודה אליה הגיע הרוכב השני.

$$BC = 4 + AD \quad \Rightarrow \quad 8t = 4 + 6t \quad \Rightarrow \quad t = 2 \text{ שעות}$$

(ב) לפי משפט פיתגורס ב- ΔACD :

$$DC^2 = AC^2 + AD^2$$

$$DC^2 = (AB - BC)^2 + AD^2 = (51 - 8 \cdot 2)^2 + (6 \cdot 2)^2 = 35^2 + 12^2 = 1{,}369$$

$$DC = \sqrt{1{,}369} = 37 \text{ ק״מ}$$

(ג) לפי משפט פיתגורס ב- ΔABD :

$$DB^2 = AD^2 + AB^2$$

$$DB^2 = 12^2 + 51^2 = 2{,}745 \quad \Rightarrow \quad DB = \sqrt{2{,}745} \approx 52.39 \text{ ק״מ}$$

(ד) המרחק בין הרוכבים t שעות מרגע יציאתם $(0 \le t \le 2)$:

$$S = \sqrt{(51 - 8t)^2 + (6t)^2} = \sqrt{100t^2 - 816t + 2{,}601}$$

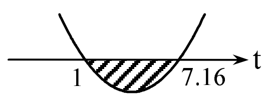
$$\sqrt{1{,}602} \le \sqrt{100t^2 - 816t + 2{,}601} \le \sqrt{1{,}885}$$

$$1{,}602 \le 100t^2 - 816t + 2{,}601 \le 1{,}885$$

$$\begin{cases} ① \; 100t^2 - 816t + 2{,}601 \le 1{,}885 \\ ② \; 100t^2 - 816t + 2{,}601 \ge 1{,}602 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ① \; 100t^2 - 816t + 716 \le 0 \\ ② \; 100t^2 - 816t + 999 \ge 0 \end{cases}$$

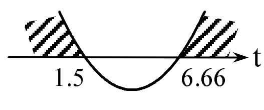
$$① \; 25t^2 - 204t + 179 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{204 \pm 154}{50}$$

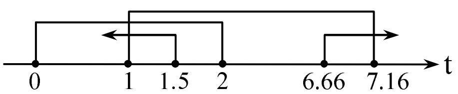
$$t_1 = 7.16 \; , \; t_2 = 1$$



$$② \; 100t^2 - 816t + 999 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{816 \pm 516}{200}$$

$$t_1 = 6.66 \; , \; t_2 = 1.5$$





תשובה: $1 \le t \le 1.5$ שעות 1 שעה

(2) (א) $\mathrm{OE}=\mathrm{OA}=\mathrm{R}=\sqrt{(x_\mathrm{A}-0)^2+(y_\mathrm{A}-0)^2}=$

$=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=$ 10 יחידות אורך

$x_\mathrm{E}=10 \;\Rightarrow\; x_\mathrm{C}=10-5=5$

$\mathrm{OC}=\mathrm{OB}=\mathrm{r}=$ 5 יחידות אורך

$x_\mathrm{C}=y_\mathrm{B}=5 \;\Rightarrow\; \mathrm{k}=5 \;\Rightarrow\; \mathrm{B}(0,5)$

(ב) $\mathrm{A}(6,8)\;,\;\mathrm{C}(5,0) \;\Rightarrow\; \mathrm{m}_{\mathrm{AC}}=\frac{y_\mathrm{A}-y_\mathrm{C}}{x_\mathrm{A}-x_\mathrm{C}}=\frac{8-0}{6-5}=8$

משוואת AC :

$y-y_\mathrm{A}=\mathrm{m}_{\mathrm{AC}}(x-x_\mathrm{A})$

$y-8=8(x-6) \;\Rightarrow\; y=8x-40$

(ג) *(i)* $\mathrm{AD}\parallel\mathrm{BC} \;\Rightarrow\; \mathrm{m}_{\mathrm{AD}}=\mathrm{m}_{\mathrm{BC}}$

$\mathrm{m}_{\mathrm{AD}}=\mathrm{m}_{\mathrm{BC}}=\frac{y_\mathrm{B}-y_\mathrm{C}}{x_\mathrm{B}-x_\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{r}-0}{0-\mathrm{r}}=-1$

משוואת AD :

$y-y_\mathrm{A}=\mathrm{m}_{\mathrm{AD}}(x-x_\mathrm{A})$

$y-8=-(x-6) \;\Rightarrow\; y=-x+14$

(ii) נמצא את שיעורי הנקודה D :

$$\begin{cases} x^2+y^2=\mathrm{R}^2 \\ y=-x+14 \end{cases}$$

$x^2+(14-x)^2=10^2 \;\Rightarrow\; 2x^2-28x+96=0$

$x^2-14x+48=0 \;\Rightarrow\; x_{1,2}=\frac{14\pm 2}{2} \;\Rightarrow\; x_1=6\;,\;x_2=8$

$x_1=6 \;\Rightarrow\; y_1=-6+14=8 \;\Rightarrow\; (6,8)$ מתאים לנקודה A

$x_2=8 \;\Rightarrow\; y_2=-8+14=6 \;\Rightarrow\; (8,6)$ מתאים לנקודה D

נמצא את משוואת BD : $\mathrm{D}(8,6)\;,\;\mathrm{B}(0,5)$

$\mathrm{m}_{\mathrm{BD}}=\frac{y_\mathrm{D}-y_\mathrm{B}}{x_\mathrm{D}-x_\mathrm{B}}=\frac{6-5}{8-0}=\frac{1}{8}$

משוואת BD :

$y-y_\mathrm{B}=\mathrm{m}_{\mathrm{BD}}(x-x_\mathrm{B})$

$y-5=\frac{1}{8}(x-0) \;\Rightarrow\; y=\frac{x}{8}+5$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

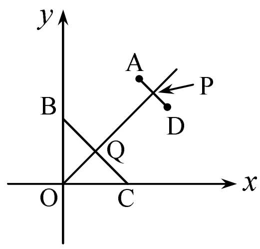
(*iii*) נמצא את שיעורי הנקודה T , נקודת החיתוך של BD ו- AC :

$$\begin{cases} y = 8x - 40 \\ y = \frac{x}{8} + 5 \end{cases} \Rightarrow \quad 8x - 40 = \frac{x}{8} + 5 \quad / \cdot 8$$

$$64x - 320 = x + 40 \quad \Rightarrow \quad 63x = 360 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{360}{63} = \frac{40}{7}$$

$$y = 8 \cdot \frac{40}{7} - 40 = \frac{40}{7}$$

$$y = x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a} = 1$$



נמצא את שיעורי הנקודה P ,

נקודת החיתוך של הישר $y = x$ והקטע AD :

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x + 14 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 7 \quad \Rightarrow \quad y = 7$$

נבדוק האם הנקודה $\mathrm{P}(7,7)$ היא אמצע הקטע AD :

$$7 \stackrel{?}{=} \frac{6+8}{2} \quad \Rightarrow \quad 7 = 7$$

$$7 \stackrel{?}{=} \frac{8+6}{2} \quad \Rightarrow \quad 7 = 7$$

הנקודה P היא אמצע AD , כלומר OP חוצה את AD .

משוואת BC : $\mathrm{B}(0,5) \;,\; \mathrm{m}_{\mathrm{BC}} = -1$

$$y - 5 = -(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = -x + 5$$

נמצא את שיעורי הנקודה Q , נקודת החיתוך של הישר $y = x$
עם הקטע BC :

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \quad x = 2.5 \quad \Rightarrow \quad y = 2.5$$

נבדוק האם הנקודה $\mathrm{Q}(2.5, 2.5)$ היא אמצע הקטע BC :

$$2.5 \stackrel{?}{=} \frac{0+5}{2} \quad \Rightarrow \quad 2.5 = 2.5$$

$$2.5 \stackrel{?}{=} \frac{5+0}{2} \quad \Rightarrow \quad 2.5 = 2.5$$

$\mathrm{Q}(2.5, 2.5)$ היא אמצע BC , כלומר OP חוצה את BC .

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ד) $S_{\Delta ABC}=\frac{BC\cdot h_1}{2}\ ,\ S_{\Delta BDC}=\frac{BC\cdot h_2}{2}$

בטרפז ABCD מתקיים: $h_1=h_2$, לכן: $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta DBC}$ ②

(3) (א) לפנינו התפלגות בינומית.

נגדיר "הצלחה": לתלמיד שנבחר באקראי יש דף אינטרנט באחת מהרשתות החברתיות.

נקבל: $k=3\ ,4\ ,5 \quad ,\ n=5\ ,\ P=0.8$

לכן: $P\left(\begin{smallmatrix}\text{לפחות ל - 3}\\ \text{יש דף אינטרנט}\end{smallmatrix}\right)=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=$

$$=\binom{5}{3}\cdot 0.8^3\cdot 0.2^2+\binom{5}{4}\cdot 0.8^4\cdot 0.2^1+\binom{5}{5}\cdot 0.8^5\cdot 0.2^0=$$

$$=10\cdot 0.8^3\cdot 0.2^2+5\cdot 0.8^4\cdot 0.2+0.8^5=$$

$$=0.2048+0.4096+0.32768=0.94208$$

(ב) (*i*) $$P\left(\begin{smallmatrix}\text{לכל ה - 5}\\ \text{יש דף אינטרנט}\end{smallmatrix}\Big/\begin{smallmatrix}\text{לפחות ל - 3}\\ \text{יש דף אינטרנט}\end{smallmatrix}\right)=\frac{P\left(\begin{smallmatrix}\text{לכל ה- 5}\\ \text{יש דף אינטרנט}\end{smallmatrix}\cap\begin{smallmatrix}\text{לפחות ל- 3}\\ \text{יש דף אינטרנט}\end{smallmatrix}\right)}{P\left(\begin{smallmatrix}\text{לפחות ל- 3}\\ \text{יש דף אינטרנט}\end{smallmatrix}\right)}=$$

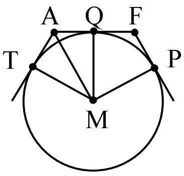
לפי סעיף (א):

$$=\frac{P\left(\begin{smallmatrix}\text{לכל ה- 5}\\ \text{יש דף אינטרנט}\end{smallmatrix}\right)}{0.94208}=\frac{0.8^5}{0.94208}=\frac{8}{23}$$

(*ii*) $$P\left(\begin{smallmatrix}\text{בדיוק ל - 4}\\ \text{יש דף אינטרנט}\end{smallmatrix}\Big/\begin{smallmatrix}\text{לפחות ל - 3}\\ \text{יש דף אינטרנט}\end{smallmatrix}\right)=\frac{P\left(\begin{smallmatrix}\text{בדיוק ל- 4}\\ \text{יש דף אינטרנט}\end{smallmatrix}\cap\begin{smallmatrix}\text{לפחות ל- 3}\\ \text{יש דף אינטרנט}\end{smallmatrix}\right)}{P\left(\begin{smallmatrix}\text{לפחות ל- 3}\\ \text{יש דף אינטרנט}\end{smallmatrix}\right)}=$$

$$=\frac{P\left(\begin{smallmatrix}\text{בדיוק ל- 4}\\ \text{יש דף אינטרנט}\end{smallmatrix}\right)}{0.94208}=\frac{\binom{5}{4}\cdot 0.8^4\cdot 0.2}{0.94208}=$$

$$=\frac{0.4096}{0.94208}=\frac{10}{23}$$



(4) (א) מעגל M חסום בתוך משושה נתון.

זווית משושה משוכלל שווה:

$$\measuredangle A = \frac{180^\circ\,(6-2)}{6} = 120^\circ$$

AM חוצה-זווית $\measuredangle TAQ$ (קטע המחבר נקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל עם מרכז המעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים)

מכאן: $\measuredangle MAQ = \frac{1}{2}\cdot\measuredangle A = \frac{1}{2}\cdot 120^\circ = 60^\circ$.

ב- ΔAQM:

$$\tan\measuredangle A = \frac{MQ}{AQ} \quad\Rightarrow\quad AQ = \frac{MQ}{\tan\measuredangle A}$$

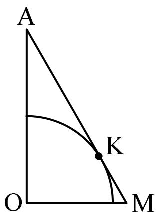
$$AQ = \frac{R}{\tan 60^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3 \text{ ס״מ}$$

באופן דומה ב- ΔFQM נקבל: $QF = 3$ ס״מ

צלע המשושה: $AQ = QF \quad\Rightarrow\quad AF = 2\cdot 3 = 6$ ס״מ

$AQ = \frac{1}{2}AM$ (במשולש 90° , 60° , 30° הניצב מול ה- 30° שווה למחצית היתר).

$AQ = \frac{1}{2}AF$, לכן $AF = AM$, כלומר אורך צלע המשושה שווה לרדיוס המעגל החוסם את המשושה.



$\measuredangle FAM = 60^\circ$ (ΔAMF הוא משולש שווה-צלעות)

$$\Downarrow$$

$\measuredangle BAM = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ (חיסור זוויות)

ב- ΔOAM: $AM = R = 6$ ס״מ

$OK \perp AM$ (רדיוס לנקודת השקה מאונך למשיק)

$$\cos\measuredangle M = \frac{OM}{AM} \quad\Rightarrow\quad OM = AM\cdot\cos\measuredangle M$$

$$OM = 6\cdot\cos 60^\circ = 6\cdot\frac{1}{2} = 3 \text{ ס״מ}$$

ב- ΔOKM:

$$\sin\measuredangle M = \frac{OK}{OM} \quad\Rightarrow\quad OK = r = OM\cdot\sin\measuredangle M$$

$$r = 3\cdot\sin 60^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ ס״מ}$$

המשך בעמוד הבא ▸▸▸

(ב) מצאנו ש- 3 ס״מ $OM =$.

(ג) לפי משפט פיתגורס ב- ΔAQM :

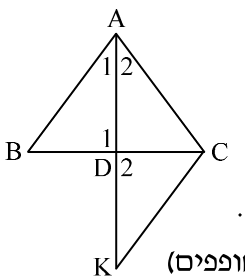
$$AQ^2 + QM^2 = AM^2$$

$$3^2 + QM^2 = 6^2 \quad \Rightarrow \quad QM = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ ס״מ}$$

הגובה לצלע OM במשולש OMD שווה ל- QM :

$$h_{OM} = QM = 3\sqrt{3} \text{ ס״מ}$$

$$S_{\Delta OMD} = \frac{OM \cdot h_{OM}}{2} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 4.5\sqrt{3} \text{ סמ״ר}$$



(5) (א) בניית עזר: נמשיך את AD כאורכו: $KD = DA$.

לפי הנתון: $BD = DC$, $\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$.

$\measuredangle D_1 = \measuredangle D_2$ (זוויות קדקודיות שוות זו לזו)

מכאן: $\Delta DKC \cong \Delta DAB$ (לפי משפט חפיפה צ.ז.צ.).

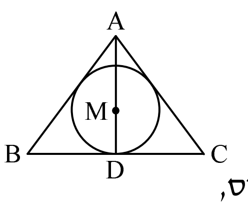
לכן: $\measuredangle AKC = \measuredangle A_1$ (זוויות מתאימות במשולשים חופפים)

כלומר: $\measuredangle AKC = \measuredangle A_2$.

מכאן: $KC = AC$ (במשולש מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות)

$KC = AB$ (במשולשים חופפים צלעות מתאימות שוות זו לזו)

לכן: $AB = AC$.



(ב) מרכז המעגל החסום במשולש נמצא בנקודת חיתוך חוצי הזוויות. במשולש שווה-שוקיים ABC ,
תיכון לבסיס הוא גם חוצה-זווית הראש וגם גובה לבסיס,
לכן מרכז המעגל החסום ב- ΔABC נמצא על AD .

$$BD = DC = \tfrac{1}{2}BC = \tfrac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ ס״מ}$$

לפי משפט פיתגורס ב- ΔABD :

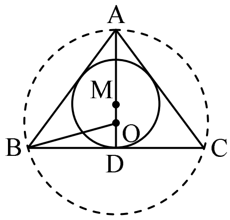
$$AB^2 = BD^2 + DA^2$$

$$25 = 9 + AD^2 \quad \Rightarrow \quad AD = 4 \text{ ס״מ}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{AB + BC + CA}{2} \cdot r$$

$$\frac{6 \cdot 4}{2} = \frac{5 + 6 + 5}{2} \cdot r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{24}{16} = 1.5 \text{ ס״מ}$$

המשך בעמוד הבא ➤➤➤



(ג) מרכז המעגל החוסם את המשולש נמצא בנקודת מפגש האנכים האמצעיים של המשולש, לכן המרכז O נמצא על AD.

$OD = AD - AO = 4 - R$ ס״מ

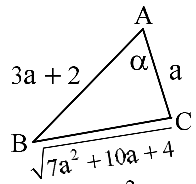
$BO = R$ ס״מ , $BD = 3$ ס״מ

לפי משפט פיתגורס ב- ΔBOD :
$$BO^2 = BD^2 + OD^2$$
$$R^2 = 3^2 + (4-R)^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 25 - 8R \quad \Rightarrow \quad R = 3\tfrac{1}{8} \text{ ס״מ}$$

ואז :
$$OD = 4 - 3\tfrac{1}{8} = \tfrac{7}{8} \text{ ס״מ}$$
$$MO = MD - OD = r - R = \tfrac{3}{2} - \tfrac{7}{8} = \tfrac{5}{8} \text{ ס״מ}$$

(6) $x^2 - 2(2a+1)x + 3a^2 + 2a = 0 \ , \ a > 0$

(א)
$$x_{1,2} = \frac{2(2a+1) \pm \sqrt{4(2a+1)^2 - 4(3a^2+2a)}}{2} =$$
$$= 2a+1 \pm \sqrt{4a^2 + 4a + 1 - 3a^2 - 2a} = 2a+1 \pm \sqrt{a^2 + 2a + 1} =$$
$$= 2a+1 \pm \sqrt{(a+1)^2} = 2a+1 \pm (a+1)$$
$$x_1 = 3a+2 \ , \ x_2 = a$$



(ב) נסמן את הזווית המבוקשת ב- α .

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔABC :
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{(3a+2)^2 + a^2 - (7a^2+10a+4)}{2 \cdot a \cdot (3a+2)} =$$
$$= \frac{9a^2 + 12a + 4 + a^2 - 7a^2 - 10a - 4}{2a(3a+2)} = \frac{3a^2+2a}{2a(3a+2)} = \frac{a(3a+2)}{2a(3a+2)} = \frac{1}{2}$$
$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm 60° + 360° n \ , \ n \in \mathbb{Z}$$

α היא זווית במשולש, כלומר $0° < \alpha < 180°$, לכן $\alpha = 60°$.

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

(ג) (i) $a=11$, מכאן: 31 ס״מ $= BC=\sqrt{7\cdot 11^2+10\cdot 11+4}$,
11 ס״מ $= AC$, 35 ס״מ $= AB$.
הצלע הגדולה ביותר במשולש היא AB , לכן הזווית הגדולה ביותר
במשולש היא הזווית $\measuredangle C$. לפי משפט הקוסינוסים:

$$AB^2=BC^2+CA^2-2\cdot BC\cdot CA\cdot\cos\measuredangle C$$

$$\cos\measuredangle C=\frac{BC^2+CA^2-AB^2}{2BC\cdot CA}=\frac{31^2+11^2-35^2}{2\cdot 31\cdot 11}=-\frac{13}{62}$$

$$\cos\measuredangle C=-\frac{13}{62}\quad\Rightarrow\quad\measuredangle C=102.103^\circ$$

הערה: במקרה זה עדיף להשתמש במשפט הקוסינוסים ולא
במשפט הסינוסים, כי במקרה האחרון קשה יותר לבחור
את הזווית הנכונה מבין שני הפתרונות האפשריים.

(ii)

$$S_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}\sin\measuredangle A=\frac{35\cdot 11}{2}\cdot\sin 60^\circ\approx$$

$= 166.71$ יחידות שטח

(7) (א) $f(x)=\sqrt{-x^2+mx+k}$, $m\,,k>0$,
נתון: $f'(0)\cdot f'(7)=-1$, $f'(4)=0$.

$$f'(x)=\frac{-2x+m}{2\sqrt{-x^2+mx+k}}$$

$$f'(4)=0\quad\Rightarrow\quad 0=\frac{-2\cdot 4+m}{+}\quad\Rightarrow\quad m=8$$

$$f'(0)\cdot f'(7)=-1\quad\Rightarrow\quad\frac{m}{2\sqrt{k}}\cdot\frac{m-14}{2\sqrt{-49+7m+k}}=-1$$

$$\frac{8}{2\sqrt{k}}\cdot\frac{-6}{2\sqrt{-49+56+k}}=-1\quad\Rightarrow\quad -48=-4\cdot\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+7}$$

$$\sqrt{k(k+7)}=12\quad /(\;)^2\quad\Rightarrow\quad k(k+7)=144$$

$$k^2+7k-144=0\quad\Rightarrow\quad k_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+4\cdot 144}}{2}=\frac{-7\pm 25}{2}$$

$$k_1=9\ ,\ k_2=-16$$

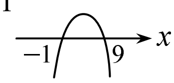
המשך בעמוד הבא ◄◄◄

הפתרון $k_2 = -16$ מבוטל, כי נתון $k > 0$.

כלומר: $k = 9$, $m = 8$ ו- $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x + 9}$.

(ב) תחום הגדרה: $-x^2 + 8x + 9 \ge 0$

$$-x^2 + 8x + 9 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-8 \pm 10}{-2} \;\Rightarrow\; x_1 = 9 \;,\; x_2 = -1$$



כלומר תחום ההגדרה: $-1 \le x \le 9$.

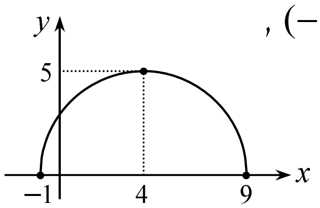
(ג) $x = 0 \;\Rightarrow\; f(0) = \sqrt{9} = 3 \;\Rightarrow\; (0,3)$

$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -1 \;,\; x_2 = 9 \;\Rightarrow\; (-1,0) \;,\; (9,0)$$

(ד) – (ו) $f'(x) = \dfrac{-2x+8}{2\sqrt{-x^2+8x+9}} = 0 \;\Rightarrow\; -2x+8=0 \;\Rightarrow\; x = 4$

$$x = 4 \;\Rightarrow\; y = \sqrt{-16+32+9} = 5 \;\Rightarrow\; (4,5)$$

בקצוות מצאנו: $(9,0)$, $(-1,0)$.



כלומר מינימום מקומי ומוחלט: $(9,0)$, $(-1,0)$,

מקסימום מקומי ומוחלט: $(4,5)$,

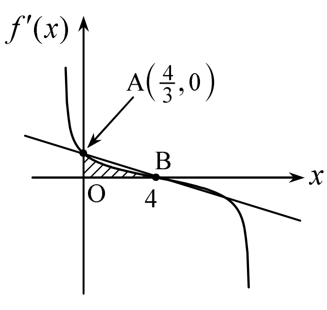
תחום עלייה: $-1 \le x < 4$,

תחום ירידה: $4 < x \le 9$.

(ז) האסימפטוטות האנכיות של $f'(x)$ הן בנקודות ההתאפסות של המכנה בביטוי של $f'(x)$, כלומר: $x = -1$, $x = 9$.

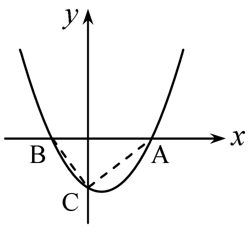
(ח) $x = 0 \;\Rightarrow\; f'(0) = \dfrac{-2\cdot 0+8}{2\sqrt{-0^2+8\cdot 0+9}} = \dfrac{8}{2\cdot 3} = \dfrac{4}{3} \;\Rightarrow\; \left(0, \frac{4}{3}\right)$

(ט) נסמן ב- S_1 את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.



$$S_1 < S_{\Delta ABO} = \frac{4 \cdot \frac{4}{3}}{2} = \frac{8}{3}$$

לכן מתקיים: $S_1 < \frac{8}{3}$ יחידות שטח.



(8) (א) $f(x)=x^2+\frac{3-3a^2}{a}x-9$ ($a>0$).

$$x_C=0 \Rightarrow y_C=0+0-9 \Rightarrow C(0,-9)$$

נראה כי הנקודות $A(3a,0)$, $B\left(-\frac{3}{a},0\right)$

נמצאות על גרף הפונקציה:

$$0\overset{?}{=}(3a)^2+\frac{3-3a^2}{a}\cdot 3a-9 \Rightarrow 0\overset{?}{=}9a^2+(3-3a^2)\cdot 3-9$$

$$0\overset{?}{=}9a^2+9-9a^2-9 \Rightarrow 0=0$$

כלומר הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה (ונמצאת על ציר ה- x).

$$0\overset{?}{=}\left(-\frac{3}{a}\right)^2+\frac{3-3a^2}{a}\cdot\left(-\frac{3}{a}\right)-9 \Rightarrow 0\overset{?}{=}\frac{9}{a^2}-\frac{3(3-3a^2)}{a^2}-9$$

$$0\overset{?}{=}\frac{9}{a^2}-\frac{9-9a^2}{a^2}-9 \Rightarrow 0\overset{?}{=}\frac{9-9+9a^2-9a^2}{a^2} \Rightarrow 0=0$$

כלומר הנקודה B (הנמצאת על ציר ה- x) נמצאת על גרף הפונקציה.

(ב)
$$f(a)=S_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot h_{AB}}{2}=\frac{(x_A-x_B)(y_A-y_C)}{2}=$$

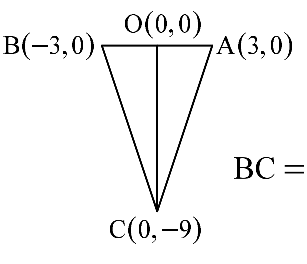
$$=\frac{\left(3a+\frac{3}{a}\right)(0+9)}{2}=\frac{27}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$f'(a)=0 \Rightarrow \frac{27}{2}\left(1-\frac{1}{a^2}\right)=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$$

נתון $a>0$, לכן נקבל: $a=1$.

$$f''(a)=\frac{27}{2}\left(1-\frac{1}{a^2}\right)'=\frac{27}{2}\cdot\frac{2}{a^3} \Rightarrow f''(1)>0 \Rightarrow \min$$

(ג) $S_{\min}=f(1)=\frac{27}{2}\left(1+\frac{1}{1}\right)=$ 27 יחידות שטח



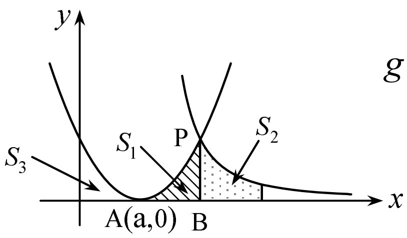
(ד) (i) $CO\perp AB$, $AO=3$, $CO=9$.

$$\tan\measuredangle A=\frac{9}{3}=3 \Rightarrow \measuredangle A=71.565°$$

(ii) $BC=\sqrt{3^2+9^2}=\sqrt{90}=$ $3\sqrt{10}$ יחידות אורך

לפי משפט הסינוסים ב- ΔABC :

$$\frac{BC}{\sin\measuredangle A}=2R \Rightarrow R=\frac{BC}{2\sin\measuredangle A}=\frac{3\sqrt{10}}{2\sin 71.565°}=$$ 5 יחידות אורך



(9) (א) $f(x)=(x-\mathrm{a})^2$, $g(x)=\left(\frac{\mathrm{b}^2}{x-\mathrm{a}}\right)^2$

($\mathrm{b}>0$, $\mathrm{a}>0$).

מציאת שיעורי הנקודה P :

$$f(x)=g(x) \;\Rightarrow\; (x-\mathrm{a})^2=\frac{\mathrm{b}^4}{(x-\mathrm{a})^2} \;\Rightarrow\; (x-\mathrm{a})^4=\mathrm{b}^4$$

$$x_1-\mathrm{a}=\mathrm{b} \;\Rightarrow\; x_1=\mathrm{a}+\mathrm{b}$$

$$x_2-\mathrm{a}=-\mathrm{b} \;\Rightarrow\; x_2=\mathrm{a}-\mathrm{b}$$

נתון כי $x_{\mathrm{P}}>\mathrm{a}$ ו- $\mathrm{b}>0$, לכן הפתרון $x_2=\mathrm{a}-\mathrm{b}$ אינו מתאים.

$$x_{\mathrm{P}}=\mathrm{a}+\mathrm{b} \;\Rightarrow\; y_{\mathrm{P}}=(\mathrm{a}+\mathrm{b}-\mathrm{a})^2=\mathrm{b}^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(\mathrm{a}+\mathrm{b},\mathrm{b}^2)$$

(ב) שיעורי הנקודה A :

$$y=0 \;\Rightarrow\; (x-\mathrm{a})^2=0 \;\Rightarrow\; x=\mathrm{a} \;\Rightarrow\; \mathrm{A}(\mathrm{a},0)$$

$$S_1=\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{a+b}}(x-\mathrm{a})^2\,dx=\Big[\frac{(x-\mathrm{a})^3}{3}\Big]\Big|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{a+b}}=\frac{\mathrm{b}^3}{3}-0=\frac{\mathrm{b}^3}{3}\ \text{יחידות שטח}$$

$$S_2=\int_{\mathrm{a+b}}^{\mathrm{a+3}}\frac{\mathrm{b}^4}{(x-\mathrm{a})^2}\,dx=\int_{\mathrm{a+b}}^{\mathrm{a+3}}\mathrm{b}^4(x-\mathrm{a})^{-2}\,dx=\Big[\frac{\mathrm{b}^4\,(x-\mathrm{a})^{-1}}{-1}\Big]\Big|_{\mathrm{a+b}}^{\mathrm{a+3}}=$$

$$=-\frac{\mathrm{b}^4}{3}+\frac{\mathrm{b}^4}{\mathrm{b}}=\mathrm{b}^3-\frac{\mathrm{b}^4}{3}\ \text{יחידות שטח}$$

נתון: $S_1=S_2$, לכן: $\frac{\mathrm{b}^3}{3}=\mathrm{b}^3-\frac{\mathrm{b}^4}{3}\quad /\cdot\frac{3}{\mathrm{b}^3}$

$$1=3-\mathrm{b} \;\Rightarrow\; \mathrm{b}=2 \;\Rightarrow\; S_1=\frac{\mathrm{b}^3}{3}=\frac{2^3}{3}=\frac{8}{3}\ \text{יחידות שטח}$$

(ג) נתון: $S_3=S_1$, לכן: $S_3=\frac{8}{3}$ יחידות שטח.

$$S_3=\int_0^{\mathrm{a}}(x-\mathrm{a})^2\,dx=\Big[\frac{(x-\mathrm{a})^3}{3}\Big]\Big|_0^{\mathrm{a}}=0-\frac{(-\mathrm{a})^3}{3}=\frac{\mathrm{a}^3}{3}$$

לכן: $\frac{\mathrm{a}^3}{3}=\frac{8}{3} \;\Rightarrow\; \mathrm{a}^3=8 \;\Rightarrow\; \mathrm{a}=2$

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929