פתרון מבחן מס' 17 (ספר לימוד – שאלון 035804)

09-05-2017

(1) נסמן: x ס"מ $= \mathrm{DB} = \mathrm{EC}$, מכאן:

$(18-x)$ ס"מ $= \mathrm{AE}$, $(24-x)$ ס"מ $= \mathrm{AD}$.

(א) (i)

$$S_{\mathrm{DBCE}} = 1.7 \cdot S_{\Delta\mathrm{ADE}} \quad \Rightarrow \quad S_{\Delta\mathrm{ABC}} - S_{\Delta\mathrm{ADE}} = 1.7 \cdot S_{\Delta\mathrm{ADE}}$$

$$S_{\Delta\mathrm{ABC}} = 2.7 \cdot S_{\Delta\mathrm{ADE}} \quad \Rightarrow \quad \frac{18 \cdot 24}{2} = 2.7 \cdot \frac{(24-x)(18-x)}{2}$$

$$160 = 432 - 42x + x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 42x + 272 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{42 \pm 26}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 34 \ , \ x_2 = 8$$

הפתרון $x_1 = 34$ נפסל, כי $x < 18$.

מכאן: 8 ס"מ $= \mathrm{DB}$.

(ii)

$$S_{\mathrm{DBCE}} = S_{\Delta\mathrm{ADE}} \quad \Rightarrow \quad S_{\Delta\mathrm{ABC}} - S_{\Delta\mathrm{ADE}} = S_{\Delta\mathrm{ADE}}$$

$$S_{\Delta\mathrm{ABC}} = 2 \cdot S_{\Delta\mathrm{ADE}} \quad \Rightarrow \quad \frac{18 \cdot 24}{2} = 2 \cdot \frac{(24-x)(18-x)}{2}$$

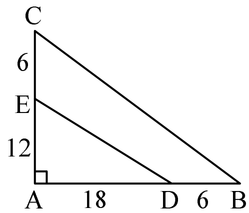
$$216 = 432 - 42x + x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 42x + 216 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{42 \pm 30}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 36 \ , \ x_2 = 6$$

הפתרון $x_1 = 36$ נפסל, כי $x < 18$.

מכאן: 6 ס"מ $= \mathrm{DB}$.

(ב) עבור: 6 ס"מ $= \mathrm{DB}$:

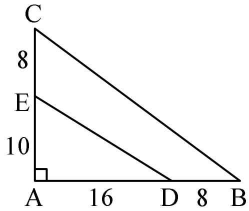


נבדוק האם מתקיים המשפט ההפוך למשפט תאלס:

$$\frac{12}{6} \stackrel{?}{=} \frac{18}{6} \quad \Rightarrow \quad 2 \neq 3$$

לכן ED אינו מקביל ל- BC .

עבור 8 ס"מ $= \mathrm{DB}$:

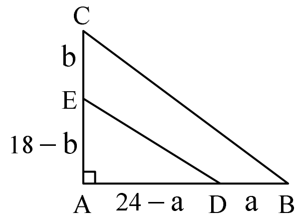


נבדוק האם מתקיים המשפט ההפוך למשפט תאלס:

$$\frac{10}{8} \stackrel{?}{=} \frac{16}{8} \quad \Rightarrow \quad 1.25 \neq 2$$

לכן ED אינו מקביל ל- BC .

המשך בעמוד הבא >>>

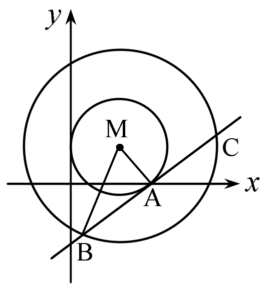


(ג) נתון: $ED \parallel CB$, לכן מתקיים משפט תאלס.

נסמן: $DB = a$, $EC = b$.

$$\frac{b}{18} = \frac{a}{24}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{DB}{EC} = \frac{4}{3}$$



(2) $3x - 4y - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}x - 5$

(א) $M(4,3)$ מרכז המעגל.

רדיוס לנקודת השקה מאונך למשיק, לכן:

$$m_R \cdot m_{\text{משיק}} = -1$$

$$m_{\text{משיק}} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad m_{\text{רדיוס לנק' השקה}} = -\frac{4}{3}$$

משוואת הישר שעליו נמצא הרדיוס לנקודת ההשקה:

$$y - 3 = -\frac{4}{3}(x-4) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$$

שיעורי נקודת ההשקה:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - 5 \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{3}{4}x - 5 = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3} \quad / \cdot 12$$

$$9x - 60 = -16x + 100 \quad \Rightarrow \quad 25x = 160 \quad \Rightarrow \quad x = 6.4$$

$$x = 6.4 \quad \Rightarrow \quad y = -0.2 \quad \Rightarrow \quad A(6.4, -0.2)$$

אורך רדיוס המעגל:

$r = MA = \sqrt{(6.4-4)^2 + (-0.2-3)^2} =$ 4 יחידות אורך

משוואת המעגל: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 16$

(ב) $\overset{\frown}{BC} = 120° \quad \Rightarrow \quad \measuredangle BMC = 120° \quad \Rightarrow \quad \measuredangle BMA = 60°$

$$MA \perp BC \quad \Rightarrow \quad \measuredangle MBA = 180° - 90° - 60° = 30°$$

במשולש ישר-זווית ABM , מול זווית בת $30°$ נמצא ניצב השווה למחצית היתר, לכן: $MA = \frac{1}{2} \cdot MB \quad \Rightarrow \quad 4 = \frac{1}{2} \cdot R \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad R =$ 8 יחידות אורך

משוואת המעגל הגדול: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 64$

(3) נסמן:

p_1 – ההסתברות שהתלמיד הראשון יפתור את החידה.

p_2 – ההסתברות שהתלמיד השני יפתור את החידה.

p_3 – ההסתברות שהתלמיד השלישי יפתור את החידה.

(א) לפי נתוני השאלה:

$$\begin{cases} p_1 = 2\cdot p_2 & ① \\ p_1\cdot p_2\cdot p_3 = 0.16 & ② \\ p_1\cdot(1-p_2)\cdot p_3 = 0.24 & ③ \end{cases}$$

נחלק משוואה ③ במשוואה ② ונקבל:

$$\frac{p_1\cdot(1-p_2)\cdot p_3}{p_1\cdot p_2\cdot p_3} = \frac{0.24}{0.16}$$

$$\frac{1-p_2}{p_2} = \frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad 2-2p_2 = 3p_2 \quad\Rightarrow\quad p_2 = \frac{2}{5} = 0.4$$

לפי משוואה ①: $p_1 = 2\cdot 0.4 = 0.8$

לפי משוואה ②: $0.8\cdot 0.4\cdot p_3 = 0.16 \quad\Rightarrow\quad p_3 = 0.5$

(ב) $P(\text{רק תלמיד אחד יפתור}) =$

$$= p_1\cdot(1-p_2)\cdot(1-p_3) + (1-p_1)\cdot p_2\cdot(1-p_3) +$$
$$+ (1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot p_3 =$$
$$= 0.8\cdot 0.6\cdot 0.5 + 0.2\cdot 0.4\cdot 0.5 + 0.2\cdot 0.6\cdot 0.5 =$$
$$= 0.24 + 0.04 + 0.06 = 0.34$$

(4) (א) נתבונן במשולשים ABG ו- ACE.

$\measuredangle CAE = \measuredangle GAB$ (כל גודל שווה לעצמו)

$\measuredangle AGB = \measuredangle AEC = 90°$ (נתון)

$\Downarrow$

$\Delta AGB \sim \Delta AEC$ (לפי משפט דמיון ז.ז.)

$\Downarrow$

$\frac{AG}{AE} = \frac{AB}{AC}$ (צלעות מתאימות במשולשים דומים מתייחסות באותו יחס)

$\Downarrow$

$AB\cdot AE = AC\cdot AG$ ①

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

(ב) נתבונן במשולשים AFC ו- CBG .

$\measuredangle AFC = \measuredangle CGB = 90°$ (נתון)

$\measuredangle FAC = \measuredangle GCB$ (זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים)

$\Downarrow$

$\Delta AFC \sim \Delta CGB$ (לפי משפט דמיון ז.ז)

$\Downarrow$

$\frac{AF}{CG} = \frac{AC}{CB}$ (צלעות מתאימות במשולשים דומים מתייחסות באותו יחס)

$\Downarrow$

$BC \cdot AF = AC \cdot CG$ ②

(ג) נחבר אגפים מתאימים בזהויות ① ו- ② :

$$AB \cdot AE + BC \cdot AF = AC \cdot AG + AC \cdot CG$$
$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC(AG + GC)$$
$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC \cdot AC = AC^2$$

(ד) (i) $\measuredangle ADC = \measuredangle CBA$ (במעוין זוויות נגדיות שוות זו לזו)

(ז) $\measuredangle FDC = \measuredangle CBE$ (זוויות צמודות לזוויות שוות)

(צ) $DC = CB$ (צלעות שוות במעוין)

$\measuredangle DFC = \measuredangle CEB = 90°$ (נתון)

$\measuredangle FCD = 180° - \measuredangle CDF - 90°$ (סכום זוויות ב- ΔCDF)

$\measuredangle BCE = 180° - \measuredangle CBE - 90°$ (סכום זוויות ב- ΔBCE)

$\Downarrow$

(ז) $\measuredangle FCD = \measuredangle BCE$ (חיסור גדלים שווים מגדלים שווים)

$\Downarrow$

$\Delta CDF \cong \Delta CBE$ (לפי משפט חפיפה ז.צ.ז)

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(*ii*) לפי משפט פיתגורס ב- ΔBCE :
$$BC^2 = BE^2 + EC^2$$
$$a^2 = BE^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad BE^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad BE = \sqrt{a^2 - b^2}$$
מסעיף (ד)(*i*) נובע: $DF = BE = \sqrt{a^2 - b^2}$ (צלעות מתאימות שוות במשולשים חופפים). מסעיף (ג) :
$$AB \cdot AE + BC \cdot AF = AC^2$$
$$AC^2 = a(AB + BE) + a(AD + DF) =$$
$$= a(AB + BE + AD + DF) =$$
$$= a(a + \sqrt{a^2 - b^2} + a + \sqrt{a^2 - b^2}) = 2a(a + \sqrt{a^2 - b^2})$$

(5) (א) $\sphericalangle ACB = 90°$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל- $90°$).
נסמן: $\sphericalangle CAD = \alpha$, מכאן:
$\sphericalangle ACD = 90° - \alpha$ (ב- ΔACD)
$\sphericalangle ABC = 90° - \alpha$ (ב- ΔABC).
$$\sphericalangle DCB = 90° - \sphericalangle ACD = \alpha$$
$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle DCB = \alpha \ , \ \sphericalangle ACD = \sphericalangle CBD = 90° - \alpha$$
מכאן: $\Delta ACD \sim \Delta CBD$ לפי משפט דמיון ז.ז.

(ב) (*i*) נסמן: $AB = x$.
ב- ΔABC :
$$AC = AB \cdot \sin \sphericalangle ABC = x\sin(90° - \alpha) = x\cos\alpha$$
ב- ΔACD :
$$CD = AC\sin \sphericalangle CAD = x\cos\alpha \cdot \sin\alpha = \tfrac{1}{2}x\sin 2\alpha$$
$\sphericalangle PCB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle CAB = \alpha$ (זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני)
ב- ΔABC :
$$BC = AB\sin \sphericalangle CAB = x\sin\alpha$$
לפי משפט הסינוסים ב- ΔBCP :
$$\frac{PC}{\sin \sphericalangle B} = \frac{BC}{\sin \sphericalangle P}$$
$$\frac{PC}{\sin\alpha} = \frac{x\sin\alpha}{\sin(180° - 2\alpha)}$$
$$PC = \frac{x\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{x\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{x}{2}\tan\alpha$$

המשך בעמוד הבא >>>

(ii) **הערה:** צריך להוכיח: $\frac{S_{\Delta ACB}}{S_{\Delta PCB}}=\frac{\mathbf{AC^2}}{\mathrm{PC\cdot CD}}$ ולא כמו שרשום.

$$\frac{AC^2}{PC\cdot CD}=\frac{(x\cdot\cos\alpha)^2}{\frac{x\sin\alpha}{2\cos\alpha}\cdot x\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{(x\cdot\cos\alpha)^2}{\frac{x^2}{2}\cdot\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{2x^2\cos^2\alpha}{x^2\sin^2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\frac{S_{\Delta ACB}}{S_{\Delta PCB}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot CD}{\frac{1}{2}(PC)^2\sin\measuredangle P}=\frac{x\cdot x\sin\alpha\cos\alpha}{\left(\frac{x\sin\alpha}{2\cos\alpha}\right)^2\cdot\sin(180^\circ-2\alpha)}=$$

$$=\frac{x^2\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{x^2\sin^2\alpha}{4\cos^2\alpha}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

כלומר: $\frac{S_{\Delta ACB}}{S_{\Delta PCB}}=\frac{AC^2}{PC\cdot CD}$.

(ג) נתון: $180^\circ-2\alpha=\measuredangle BPC=60^\circ$, מכאן: $\alpha=60^\circ$.

(i) לפי משפט הסינוסים ב- ΔPCB :

$$\frac{BC}{\sin\measuredangle P}=2R$$

$$\frac{AB\sin 60^\circ}{\sin(180^\circ-2\cdot 60^\circ)}=2R\quad\Rightarrow\quad\frac{AB\sin 60^\circ}{\sin 60^\circ}=2R$$

מכאן:

$$AB=2R=D_{\Delta PCB}$$

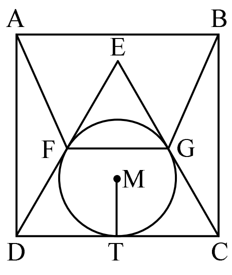
(ii) עבור $\alpha=60^\circ$, ΔPCB הוא משולש שווה-צלעות.

$$r=\frac{1}{2}BC\cdot\tan\left(\frac{1}{2}\measuredangle C\right)=\frac{1}{2}\cdot x\sin 60^\circ\cdot\tan 30^\circ=$$

$$=\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{4}x$$

$$AC=x\cos 60^\circ=\frac{1}{2}x\quad\Rightarrow\quad AC=2r=d$$

(6) נוריד קטע MT מנקודה M לנקודת ההשקה של הצלע DC למעגל.



(א) $MT\perp DC$ (רדיוס לנקודת השקה מאונך למשיק)

לפי סימטריה, הנקודה M נמצאת על אנך אמצעי ל- DC , כלומר הנקודה T היא אמצע הקטע DC .

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$DT = DF \ , \ TC = CG$ (שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה אחת שווים)

$DT = TC$ (הוכחנו)

$\Downarrow$

$DF = CG$ (הצבה)

$EF = ED - DF$ (חיסור קטעים)

$EG = EC - GC$ (חיסור קטעים)

$\Downarrow$

$EF = EG$ (חיסור גדלים שווים מגדלים שווים)

$\measuredangle E = 60°$ (נתון ש- EDC הוא משולש שווה-צלעות,
סכום זוויות במשולש $180°$ ובמשולש מול
צלעות שוות מונחות זוויות שוות)

$\Downarrow$

$EF = FG = GE$ (משולש שווה-שוקיים עם זווית ראש בת $60°$
הוא משולש שווה-צלעות)

$DF = DT = \frac{1}{2} \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 4 =$ 2 ס"מ

$FG = EF = ED - DF$

$FG = 4 - 2 =$ 2 ס"מ (הצבה)

ב) $\measuredangle EDC = \measuredangle DCE = 60°$ (זוויות במשולש שווה-צלעות)

נתבונן ב- ΔADF ו- ΔBCG .

$\measuredangle ADF = 90° - \measuredangle EDC = 90° - 60° = 30°$ (חיסור זוויות)

$\measuredangle BCG = 90° - \measuredangle DCE = 90° - 60° = 30°$ (חיסור זוויות)

$\Downarrow$

ז. $\measuredangle ADF = \measuredangle BCG$ (חיסור גדלים שווים מגדלים שווים)

צ. $DF = GC$ (הוכחנו בסעיף (א))

צ. $AD = CB$ (נתון)

$\Downarrow$

$\Delta ADF \cong \Delta BCG$ (לפי משפט חפיפה צ.ז.צ)

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

(ג) בסעיף (א) הוכחנו כי: $FE = EG = GF$, לכן:

$\measuredangle FEG = \measuredangle FGE = \measuredangle GFE = 60^\circ$ (סכום זוויות במשולש 180° ובמשולש מול צלעות שוות נמצאות זוויות שוות)

$\measuredangle EFG = \measuredangle EDC = 60^\circ$ (הצבה)

$\Downarrow$

$FG \parallel DC$ (אם זוויות מתאימות בין ישרים שוות זו לזו, הישרים מקבילים)

$\Downarrow$

טרפז $FGCD$

$DF = CG$ (הוכחנו בסעיף (א))

$\Downarrow$

טרפז שווה-שוקיים $FGCD$

לפי חפיפת משולשים בסעיף (ב):

$AF = BG$ (צלעות מתאימות במשולשים חופפים)

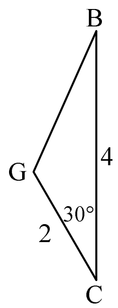
$FG \parallel DC$, $DC \parallel AB$

$\Downarrow$

$FG \parallel AB$

$\Downarrow$

טרפז שווה-שוקיים $ABGF$



(ד) נתבונן ב- ΔCGB : $BC =$ 4 ס"מ , $GC =$ 2 ס"מ .

$\measuredangle BCG = 30^\circ$ (לפי סעיף (ב)).

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔCGB :

$$BG^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ$$

$BG =$ 2.4786 ס"מ

לפי משפט הסינוסים ב- ΔCGB :

$$\frac{BG}{\sin 30^\circ} = \frac{GC}{\sin \measuredangle GBC} \Rightarrow \frac{2.4786}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sin \measuredangle GBC}$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$\sin \measuredangle GBC = \frac{2 \cdot \sin 30°}{2.4786} = \frac{1}{2.4786}$$

$\measuredangle GBC = 23.79°$ או $\measuredangle GBC = 180° - 23.79 = 156.21°$

$\measuredangle GBC = 156.21°$ לא ייתכן, כי $\measuredangle GBC < 90°$.

$$\measuredangle ABG = 90° - \measuredangle GBC = 90° - 23.79° = 66.21°$$

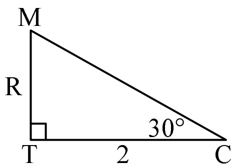
(ה) $S_{\Delta ADF} = S_{\Delta BCG} = \frac{BC \cdot CG}{2} \cdot \sin \measuredangle BCG =$

$= \frac{4 \cdot 2}{2} \cdot \sin 30° =$ 2 סמ״ר

(ו) מרכז המעגל החסום במשולש נמצא בנקודת החיתוך של חוצי הזוויות,

לכן: $\measuredangle MCT = \frac{1}{2} \measuredangle ECT = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$

נתבונן ב- ΔCMT .



$\tan 30° = \frac{MT}{TC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{R}{2} \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx$ 1.155 ס״מ

(ז) $S_{ABGF} = \frac{AB + FG}{2} \cdot h_1 = \frac{4+2}{2} \cdot h_1 = 3h_1$

$$S_{FGCD} = \frac{DC + FG}{2} \cdot h_2 = \frac{4+2}{2} \cdot h_2 = 3h_2$$

$$\frac{S_{ABGF}}{S_{FGCD}} = \frac{3h_1}{3h_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

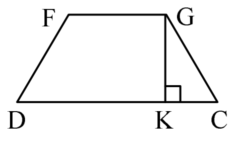
נעביר $GK \perp DC$. מכאן: $h_2 = GK$.

ב- ΔCKG : $\sin \measuredangle C = \frac{GK}{GC} \Rightarrow \sin 60° = \frac{h_2}{2}$

$h_2 = 2\sin 60° =$ $\sqrt{3}$ ס״מ

$h_1 + h_2 = AD =$ 4 ס״מ

$h_1 = 4 - h_2 =$ $(4 - \sqrt{3})$ ס״מ



$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{4 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \approx 1.3094$$

(7) (א) למציאת שיעורי הנקודות A ו- B, יש לפתור מערכת משוואות:

$$\begin{cases} y = \mathrm{a}x + 2\mathrm{a} \\ y = -x^2 + 2x + 8 \end{cases}$$

$$-x^2 + 2x + 8 = \mathrm{a}x + 2\mathrm{a} \quad \Rightarrow \quad x^2 + x(\mathrm{a}-2) + 2\mathrm{a} - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{(2-\mathrm{a}) \pm \sqrt{4 - 4\mathrm{a} + \mathrm{a}^2 - 8\mathrm{a} + 32}}{2} = \frac{(2-\mathrm{a}) \pm \sqrt{\mathrm{a}^2 - 12\mathrm{a} + 36}}{2} =$$

$$= \frac{(2-\mathrm{a}) \pm \sqrt{(\mathrm{a}-6)^2}}{2} = \frac{(2-\mathrm{a}) \pm (\mathrm{a}-6)}{2}$$

$$x_1 = \frac{(2-\mathrm{a}) + (\mathrm{a}-6)}{2} = -2$$

$$y_1 = \mathrm{a} \cdot (-2) + 2 \cdot \mathrm{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A}(-2,0)$$

$$x_2 = \frac{(2-\mathrm{a}) - (\mathrm{a}-6)}{2} = 4 - \mathrm{a}$$

$$y_2 = \mathrm{a} \cdot (4-\mathrm{a}) + 2 \cdot \mathrm{a} = 6\mathrm{a} - \mathrm{a}^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B}(4-\mathrm{a}, 6\mathrm{a} - \mathrm{a}^2)$$

(ב) (i) כדי למצוא ביטוי לשיפוע המשיק, נגזור את הפונקציה הריבועית:

$$y' = -2x + 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{m_B} = y'(4-\mathrm{a}) = -2(4-\mathrm{a}) + 2 = 2\mathrm{a} - 6$$

נתון כי $\mathrm{m_B} = -2$, מכאן: $2\mathrm{a} - 6 = -2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a} = 2$

(ii) $\mathrm{m_B} = -2$, $\mathrm{B}(2,8)$.

משוואת המשיק: $y - y_{\mathrm{B}} = \mathrm{m_B}(x - x_{\mathrm{B}})$

$$y - 8 = -2(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 12$$

(iii) $\mathrm{B}(2,8)$, $\mathrm{A}(-2,0)$, מכאן משוואת AB :

$$y - y_{\mathrm{A}} = \frac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}}(x - x_{\mathrm{A}})$$

$$y - 0 = \frac{8-0}{2+2}(x+2) \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 4$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

ג) שיעורי הנקודה C :
$$\begin{cases} x=0 \\ y=-2x+12 \end{cases} \Rightarrow \quad y=12 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C}(0,12)$$

שיעורי הנקודה D :
$$\begin{cases} x=0 \\ y=2x+4 \end{cases} \Rightarrow \quad y=4 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{D}(0,4)$$

$\mathrm{CD}=y_{\mathrm{C}}-y_{\mathrm{D}}=12-4=$ 8 יחידות אורך

לפי משפט הסינוסים ב- $\Delta\mathrm{BCD}$:

$\frac{\mathrm{CD}}{\sin\measuredangle\mathrm{B}}=2\mathrm{R} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R}=\frac{\mathrm{CD}}{2\sin\measuredangle\mathrm{B}}=\frac{8}{2\cdot 0.8}=$ 5 יחידות אורך

ד) $S=S_1+S_2=S_{\Delta\mathrm{CDB}}=\frac{\mathrm{CD}\cdot\mathrm{h_{CD}}}{2}=\frac{8\cdot x_{\mathrm{B}}}{2}=\frac{8\cdot 2}{2}=$ 8 יחידות שטח

$$S_1=\int_0^2[-2x+12-(-x^2+2x+8)]\,dx=\int_0^2(x^2-4x+4)\,dx=$$

$$=\int_0^2(x-2)^2\,dx=\left.\frac{(x-2)^3}{3}\right|_0^2=\frac{(2-2)^3-(0-2)^3}{3}=$$

$=\frac{0+8}{3}=$ $\frac{8}{3}$ יחידות שטח

$S_2=S-S_1=8-\frac{8}{3}=$ $\frac{16}{3}$ יחידות שטח

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{16}{3}\cdot\frac{3}{8}=2 \quad \Rightarrow \quad S_2=2S_1$$

(8) (א) (i) $S_1=4 \;\Rightarrow\; \int_0^2 g(x)dx=4 \;\Rightarrow\; \int_0^2 f'(x)dx=4$

$f(x)\Big|_0^2=4 \;\Rightarrow\; f(2)-f(0)=4$

$f(2)-0=4 \;\Rightarrow\; f(2)=4$

(ii) $S_2=4 \;\Rightarrow\; -\int_2^4 g(x)\,dx=4 \;\Rightarrow\; -\int_2^4 f'(x)dx=4$

$-f(x)\Big|_2^4=4 \;\Rightarrow\; f(2)-f(4)=4$

$4-f(4)=4 \;\Rightarrow\; f(4)=0$

(ב) $f(x)$ עולה $\Leftrightarrow\; f'(x)>0 \;\Leftrightarrow\; g(x)>0 \;\Leftrightarrow\; 0\le x<2$

$f(x)$ יורדת $\Leftrightarrow\; f'(x)<0 \;\Leftrightarrow\; g(x)<0 \;\Leftrightarrow\; 2<x\le 6$

(ג) לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון כאשר $f'(x)=g(x)=0$

ו- $g(x)$ מחליפה את סימנה, וכן בנקודות הקצה.

$f(0)=0 \Rightarrow x=0$, מכאן $(0,0)$ היא נקודת מינימום מקומי (בקצה).

$f(2)=4 \Rightarrow x=2$, עבור $x<2$ $g(x)=f'(x)>0$, כלומר

הפונקציה $f(x)$ עולה. עבור $x>2$ $g(x)=f'(x)<0$, כלומר

הפונקציה $f(x)$ יורדת. מכאן, $(2,4)$ היא נקודת מקסימום מוחלט.

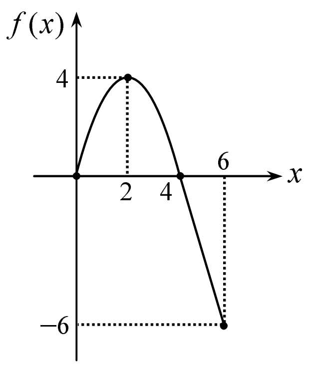
$$\int_2^6 g(x)dx=-S_2-S_{\text{מלבן}} \;\Rightarrow\; \int_2^6 f'(x)dx=-4-2\cdot 3=-10 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f(x)\Big|_2^6=-10 \;\Rightarrow\; f(6)-f(2)=-10 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f(6)-4=-10 \;\Rightarrow\; f(6)=-6$$

כלומר $(6,-6)$ היא נקודת מינימום מוחלט.

(ד) ראו סרטוט משמאל.



(ה) בתחום $4\le x\le 6$ הפונקציה $f(x)$

היא פונקציה קווית, לכן:

$$S_{\text{מבוקש}}=S_{\text{משולש}}=\frac{(6-4)\,[0-(-6)]}{2}=$$

$S_{\text{משולש}}=\frac{2\cdot 6}{2}=$ 6 יחידות שטח

(9) (א) לפי הסרטוט, $f'(1.25)=0$, לכן: $\frac{2a}{\sqrt{m-5}}-a=0 \quad /:a\neq 0$

$$\frac{2}{\sqrt{m-5}}-1=0 \;\Rightarrow\; \sqrt{m-5}=2 \;\Rightarrow\; m-5=4 \;\Rightarrow\; m=9$$

משוואת האסימפטוטה האופקית של $f'(x)$ היא: $y=0-a=-a$

לפי הסרטוט נקבל: $-a=-6 \;\Rightarrow\; a=6$

(ב) $f(0)=-18$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(\frac{12}{\sqrt{9-4x}}-6\right)dx=-6\sqrt{9-4x}-6x+C$$

$$f(0)=18 \;\Rightarrow\; -6\sqrt{9-0}-6\cdot 0+C=-18$$

$$-18+C=-18 \;\Rightarrow\; C=0 \;\Rightarrow\; f(x)=-6\sqrt{9-4x}-6x$$

(ג) $S_{\text{מקווקו}}=-\int_k^0 f'(x)\,dx=-f(x)\Big|_k^0=f(k)-f(0)$

$$-6\sqrt{9-4k}-6k-(-6\sqrt{9-4\cdot 0}-6\cdot 0)=12$$

$$-6\sqrt{9-4k}-6k+18=12 \quad /:6$$

$$\sqrt{9-4k}=-k+1 \quad /(\;)^2 \quad (k<0)$$

$$9-4k=k^2-2k+1$$

$$k^2+2k-8=0 \;\Rightarrow\; k_{1,2}=\frac{-2\pm 6}{2} \;\Rightarrow\; k_1=2\;,\;k_2=-4$$

הפתרון $k_1=2$ נפסל כי $k<0$.

תשובה: $k=-4$.