

פתרון מבחן מס' 15 (ספר לימוד – שאלון 035804)

09-05-2017

(1) (א) נסמן ב- x את מספר המוצרים מסוג א'

ואז $(a - x)$ יסמן את מספר המוצרים מסוג ב'.

עבור כל המוצרים מסוג א' הסוחר שילם $120x$ ש"ח.

המחיר הממוצע של כל המוצרים הוא $\frac{5,400}{a}$ ש"ח.

לכן המחיר של כל מוצר מסוג ב' הוא $\left(\frac{5,400}{a} - 15\right)$ ש"ח.

כלומר הסוחר שילם עבור כל המוצרים מסוג ב' :

$$\left(\frac{5,400}{a} - 15\right) \cdot (a - x) \text{ ש"ח.}$$

על-סמך הנתון שהסוחר שילם 5,400 ש"ח אפשר להרכיב את המשוואה :

$$120x + \left(\frac{5,400}{a} - 15\right) \cdot (a - x) = 5,400$$

$$120x + \cancel{5,400} - \frac{5,400x}{a} - 15a + 15x = \cancel{5,400}$$

$$135x - \frac{5,400x}{a} = 15a \quad / :15$$

$$a = 9x - \frac{360x}{a} \Rightarrow a = x\left(9 - \frac{360}{a}\right) \quad / \cdot a$$

$$a^2 = x(9a - 360) \Rightarrow x = \frac{a^2}{9a - 360} = \text{מספר המוצרים מסוג א'}$$

$$a - x = a - \frac{a^2}{9a - 360} = \frac{8a^2 - 360a}{9a - 360} = \text{מספר המוצרים מסוג ב'}$$

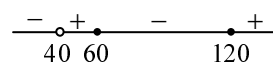
$$x = \frac{a^2}{9a - 360} \leq 20 \quad \text{(ב) נתון: } a > 0, a \text{ מספר טבעי,}$$

$$\frac{5,400}{a} - 15 < 120 \quad \text{ומכיון שמוצר ב' זול יותר ממוצר א', מתקיים גם:}$$

$$\frac{a^2}{9a - 360} - 20 \leq 0 \Rightarrow \frac{a^2 - 180a + 7,200}{9a - 360} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(a - 120)(a - 60)}{9(a - 40)} \leq 0$$

(*)



המשך בעמוד הבא <<<

ערך הביטוי (*)	עבור
שלילי	$a = 30$
חיובי	$a = 50$
שלילי	$a = 70$
חיובי	$a = 130$

כלומר $60 \leq a \leq 120$ או $a < 40$.

$$\frac{5,400}{a} < 135 \Rightarrow a > 40$$

לכן, בסך הכול, מערכת האי-שוויונות נראית כך:

$$\begin{cases} a > 0 \\ -a \text{ מספר טבעי} \\ a < 40 \text{ או } 60 \leq a \leq 120 \\ a > 40 \end{cases} \Rightarrow$$

מחיתוך בין ארבע הקבוצות ומהתשובה לסעיף (א) מקבלים:

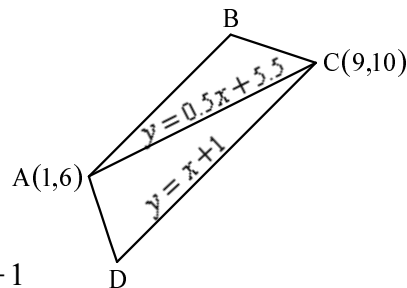
a מספר טבעי המקיים: $60 \leq a \leq 120$.

(ג) נתון: $3x = a - x$, כלומר: $4x = a$.

$$4 \cdot \frac{a^2}{9a - 360} = a \quad / : a \neq 0$$

$$\frac{4a}{9a - 360} = 1 \Rightarrow 4a = 9a - 360 \Rightarrow 5a = 360 \Rightarrow a = 72$$

(ד) אם $a = 72$ אז מחיר של מוצר אחד מסוג ב' : 60 ש"ח $\frac{5,400}{72} - 15$



(2) (א) C היא נקודת החיתוך

של הישרים AC ו-DC,

כלומר את שיעוריה נמצא

מפתרון מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ 2y = x + 11 \Rightarrow y = 0.5x + 5.5 \end{cases}$$

$$x + 1 = 0.5x + 5.5$$

$$0.5x = 4.5 \quad / \cdot 2 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow y = 9 + 1 = 10$$

כלומר: $C(9, 10)$.

נתון ששיעור ה- y של קדקוד A הוא 6 והנקודה A נמצאת על הישר AC,

$$6 = 0.5x + 5.5 \Rightarrow 0.5 = 0.5x \quad / \cdot 2 \Rightarrow x_A = 1$$

כלומר: $A(1, 6)$.

המשך בעמוד הבא <<<

$$AB \parallel DC \Rightarrow m_{AB} = m_{DC} = 1 \quad (ב)$$

$$y - 6 = 1(x - 1) \quad : \text{משוואת } AB$$

$$y = x + 5 \quad : \text{כלומר}$$

(ג) (i) B היא נקודת החיתוך של AB ו- BD ,

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 5 \end{cases} \Rightarrow 2x - 1 = x + 5 \Rightarrow x_B = 6 \quad : \text{לכן}$$

$$x_B = 6 \Rightarrow y_B = 6 + 5 = 11$$

כלומר B(6,11) .

D היא נקודת החיתוך של הישרים DC ו- BD , לכן :

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow 2x - 1 = x + 1 \Rightarrow x_D = 2$$

$$x_D = 2 \Rightarrow y_D = 2 + 1 = 3$$

כלומר : D(2,3) .

$$D(2,3) , A(1,6) \quad (ii)$$

$$AD = \sqrt{(2-1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \quad \text{יחידות אורך}$$

$$C(9,10) , B(6,11)$$

$$BC = \sqrt{(9-6)^2 + (10-11)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \quad \text{יחידות אורך}$$

לכן הטרפז הוא טרפז שווה-שוקיים.

(ד) נסמן את נקודת מרכז המעגל ב-M ,

ונסמן : $x_m = y_m = a$ (נתון כי הנקודה M נמצאת על הישר $y = x$).

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = R^2 \quad : \text{משוואת המעגל}$$

נקודות A(1,6) ו- C(9,10) נמצאות על המעגל, לכן :

$$\begin{cases} (1-a)^2 + (6-a)^2 = R^2 \\ (9-a)^2 + (10-a)^2 = R^2 \end{cases}$$

$$(1-a)^2 + (6-a)^2 = (9-a)^2 + (10-a)^2$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$1 - 2a + a^2 + 36 - 12a + a^2 = 81 - 18a + a^2 + 100 - 20a + a^2$$

$$24a = 144 \Rightarrow a = 6$$

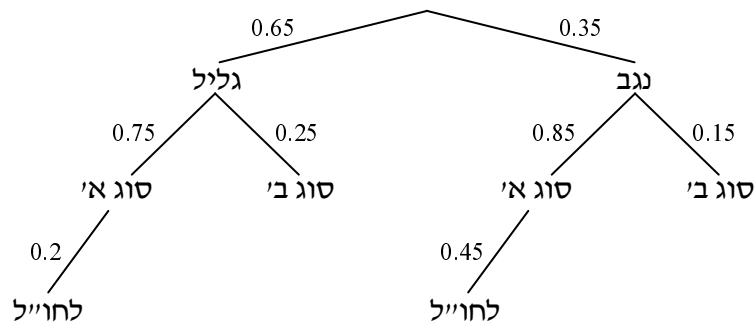
$$R^2 = (1 - 6)^2 + (6 - 6)^2 = 25 \quad \text{ואז:}$$

$$(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 25 \quad \text{כלומר משוואת המעגל:}$$

נבדוק שהנקודות $B(6,11)$ ו- $D(2,3)$ נמצאות על המעגל.

$$\begin{cases} (6 - 6)^2 + (11 - 6)^2 = 25 \Rightarrow 25 = 25 \\ (2 - 6)^2 + (3 - 6)^2 = 25 \Rightarrow 25 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{כל קדקודי הטרפז} \\ \text{נמצאים על המעגל.} \end{matrix}$$

(3) (א) נבנה עץ הסתברויות:



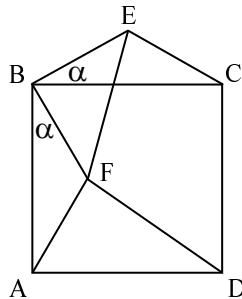
$$P(\text{לחוי"ל}) = 0.65 \cdot 0.75 \cdot 0.2 + 0.35 \cdot 0.85 \cdot 0.45 = 0.231375$$

כלומר 23.1375% מתוך כלל האריגים מיוצאים לחוי"ל.

$$P(\text{סוג ב'}) = 0.65 \cdot 0.25 + 0.35 \cdot 0.15 = 0.215 \quad \text{(ב)}$$

כלומר 21.5% מתוך כלל האריגים הם מסוג ב'.

$$P(\text{סוג ב' / "גליל"}) = \frac{P(\text{סוג ב'} \cap \text{"גליל"})}{P(\text{סוג ב'})} = \frac{0.65 \cdot 0.25}{0.215} = 0.7558 \quad \text{(ג)}$$



$$AB = BC = CD = AD \quad (4) \text{ נתון : (1)}$$

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ \quad (2)$$

$$BE = EC \quad (3)$$

$$\triangle FBA \cong \triangle EBC \quad (4)$$

$$EF = 16 \text{ ס"מ} \quad (5)$$

$$\angle BEC = 120^\circ \quad (6)$$

$$\text{נובע מ- (3) ו- (4).} \quad AF = BF = BE = EC \quad (\text{א})$$

$$\text{סימון.} \quad \angle ABF = \angle EBC = \alpha$$

$$\text{לפי (2).} \quad \angle ABC = 90^\circ$$

$$\text{חיסור זוויות.} \quad \angle FBC = 90^\circ - \alpha$$

$$\text{חיבור זוויות.} \quad \angle FBE = \angle FBC + \angle EBC$$

$$\text{הצבה.} \quad \angle FBE = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$$

מ.ש.ל. (א)

$$\text{לפי (4) צלעות מתאימות שוות} \quad FB = EB \quad (\text{ב})$$

במשולשים חופפים.



אם במשולש יש שתי צלעות שוות זה לזה, אז המשולש הוא משולש שווה-שוקיים.

משולש שווה-שוקיים.

מ.ש.ל. (ב)

מ.ש.ל. (ב)

$$\text{נתבונן ב- } \triangle BEF : BE = BF$$

ולכן לפי משפט פיתגורס:

$$BE^2 + BF^2 = EF^2 \Rightarrow 2BE^2 = EF^2 \Rightarrow BE = \sqrt{\frac{EF^2}{2}}$$

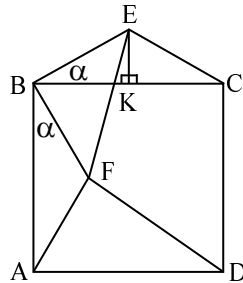
$$BE = \sqrt{\frac{16^2}{2}} = 8\sqrt{2} \text{ ס"מ}$$

נתבונן ב- $\triangle BCE$:

$$\text{במשולש שווה-שוקיים} \quad \angle B = \angle C = \frac{180^\circ - \angle E}{2} =$$

$$\text{זוויות הבסיס שוות זה לזה.} \quad = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

המשך בעמוד הבא <<<



נוריד גובה EK לבסיס BC.

$$\cos \angle EBK = \frac{BK}{BE}$$

$\Downarrow$

$$BK = 8\sqrt{2} \cdot \cos 30^\circ = 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BK = 4\sqrt{6} \text{ ס"מ}$$

גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם תיכון ולכן:

$$BK = CK \Rightarrow BC = 2 \cdot 4\sqrt{6} \Rightarrow BC = 8\sqrt{6} \text{ ס"מ}$$

$$P = 4 \cdot BC = 4 \cdot 8\sqrt{6} = 32\sqrt{6} \text{ ס"מ} : \text{היקף הריבוע } ABCD$$

(ד) לפי משפט הקוסינוסים ב- $\triangle ADF$:

$$FD^2 = (8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{6} \cdot \cos 60^\circ$$

$$FD^2 = 128 + 384 - 64\sqrt{12} \Rightarrow FD = 17.038 \text{ ס"מ}$$

$$\frac{8\sqrt{2}}{\sin \angle ADF} = \frac{17.038}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \angle ADF = 35.1^\circ : \text{לפי משפט הסינוסים}$$

$$\angle FEC = \angle BEC - \angle BEF \quad \text{חיסור זוויות.} \quad (ה)$$

$\Downarrow$

$$\angle FEC = 120^\circ - 45^\circ = 75^\circ$$

$$\angle FDC < \angle ADC \quad \text{חלק קטן מהשלם.}$$

$\Downarrow$

$$\angle FEC + \angle FDC < 180^\circ$$

ולכן לא ניתן לחסום את המרובע CDFE במעגל.

$$S_{CDFE} = S_{ABCD} + S_{ABCE} - S_{\triangle BEF} - S_{\triangle ABF} - S_{\triangle ADF} \quad (*) \quad (ו)$$

$$S_{ABCD} = (AD)^2 = 64 \cdot 6 = 384 \text{ סמ"ר}$$

$$S_{ABCE} = S_{\triangle ABF}$$

$$S_{\triangle BEF} = \frac{BE \cdot BF}{2} = \frac{(8\sqrt{2})^2}{2} = 64 \text{ סמ"ר}$$

$$S_{\triangle ADF} = \frac{AF \cdot AD}{2} \sin \angle FAD = \frac{8\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{6}}{2} \sin 60^\circ = \frac{64 \cdot \sqrt{12}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 96$$

נציב את הביטויים ב- (*) ונקבל:

$$S_{CDFE} = 384 - 64 - 96 = 224 \text{ סמ"ר}$$

$$DE = EC = \frac{1}{2} DC = b \quad (5)$$

$$DM = ME = r = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} b$$

$$\angle DAM = \angle MAE = \frac{1}{2} \angle DAN \quad (\alpha)$$

שני משיקים למעגל עם מרכז המעגל, חוצה את הזווית בין המשיקים.

$$\tan \angle DAM = \frac{DM}{AD} = \frac{\frac{1}{4}b}{b} = \frac{1}{4} \quad \text{ב-} \triangle ADM :$$

$$\angle DAM = 14.036^\circ \Rightarrow \angle DAN = 2 \cdot 14.036^\circ \approx 28.07^\circ$$

$$AN = AD = b \quad (\text{שני משיקים למעגל מנקודה אחת שווים זה לזה})$$

$$\angle BAN = 90^\circ - \angle DAN \approx 61.93^\circ$$

לפי משפט הקוסינוסים ב- $\triangle ABN$:

$$BN^2 = AN^2 + AB^2 - 2 \cdot AN \cdot AB \cdot \cos \angle A$$

$$BN^2 = 4b^2 + 4b^2 - 8b^2 \cos 61.93^\circ =$$

$$= 8b^2 (1 - \cos 61.93^\circ) \approx 4.236b^2$$

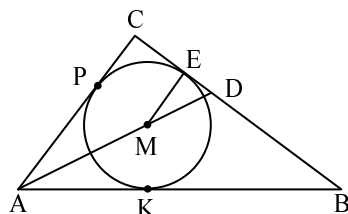
$$BN = \sqrt{4.236b^2} \approx 2.058b \quad \text{יחידות אורך}$$

$$\angle NAB = 61.93^\circ \quad (\gamma)$$

$$\angle ABN = \angle ANB = \frac{180^\circ - \angle NAB}{2} = \frac{180^\circ - 61.93^\circ}{2} = 59.035^\circ$$

$$\angle NBC = 90^\circ - \angle ABN = 90^\circ - 59.035^\circ = 30.965^\circ$$

$$S_{\triangle BNC} = \frac{BN \cdot BC}{2} \sin \angle NBC = \frac{2.058b \cdot 2b}{2} \sin 30.965^\circ \approx 1.059b^2 \quad \text{יחידות שטח}$$



(6) לפי משפט פיתגורס ב- $\triangle ABC$:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

נציב את הנתונים ונקבל :

$$30^2 = 18^2 + BC^2 \Rightarrow BC = 24 \text{ ס"מ}$$

AD הוא חוצה-זווית $\angle A$ במשולש ABC (קטע המחבר מרכז מעגל

עם נקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל זה, חוצה את הזווית בין המשיקים).

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} \Rightarrow DB = \frac{5}{3} CD \quad \text{לפי משפט חוצה-זווית :}$$

$$CD + \frac{5}{3} CD = 24 \quad \text{כמו כן, } DC + DB = 24 \text{ ס"מ, אז :}$$

$$\frac{8}{3} CD = 24 \Rightarrow CD = 9 \text{ ס"מ}$$

המשך בעמוד הבא <<<

נסמן: $CE = a$, ואז:

$CP = CE = a$ שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה אחת,

שווים זה לזה

$$PA = AK = 18 - a \quad \text{כנ"ל + חיסור קטעים}$$

$$KB = BE = AB - AK = 30 - (18 - a) = 12 + a$$

$$CE + EB = CB \quad \text{חיבור קטעים}$$

$$a + 12 + a = 24 \quad \text{הצבה}$$

$$a = 6 \quad \text{ס"מ}$$

$$ED = CD - CE \quad \text{חיסור קטעים}$$

$$ED = 9 - 6 = 3 \quad \text{ס"מ} \quad \text{הצבה}$$

מ.ש.ל

(7) (א) יש למצוא את ערכי x שעבורם $f'(x) = 0$.

נקודות אלה מתאימות לנקודות "חשודות" לקיצון של הפונקציה $f(x)$.

$$x = -1 \Rightarrow (-1, 0)$$

$$x = 2 \Rightarrow (2, 0)$$

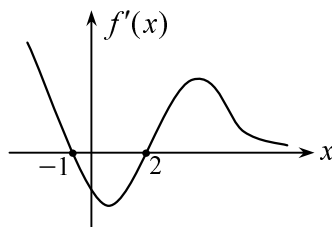
(ב) $f'(x)$ (נגזרת) חיובית כאשר $f(x)$ (הפונקציה) עולה,

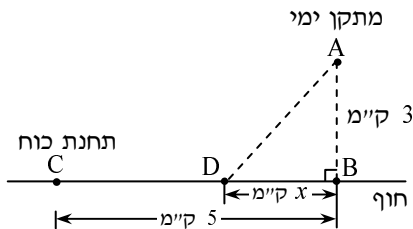
כלומר עבור $x < -1$, $x > 2$.

$f'(x)$ שלילית כאשר $f(x)$ יורדת: $-1 < x < 2$.

(ג) ראו סרטוט למטה.

$$\int_{-1}^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_{-1}^2 = f(2) - f(-1) = -4 - 2 = -6 \quad (ד)$$





$$M = M_{AB} + M_{BC} = \quad (א) \quad (8)$$

$$= 3,000 \cdot 260 + 5,000 \cdot 100$$

$$M = 1,280,000 \text{ ש"ח}$$

(ב) לפי משפט פיתגורס ב- $\triangle ABC$:

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 = 5^2 + 3^2 = 34 \Rightarrow AC = \sqrt{34} \text{ ק"מ}$$

$$M_{AC} = \sqrt{34} \cdot 1,000 \cdot 260 = 1,516,047.49 \text{ ש"ח}$$

$$f(x) = M_{AD} + M_{DC} = \quad (i) \quad (ג)$$

$$= \sqrt{3^2 + x^2} \cdot 1,000 \cdot 260 + (5 - x) \cdot 1,000 \cdot 100 =$$

$$= \sqrt{x^2 + 9} \cdot 260,000 + (5 - x) \cdot 100,000 =$$

$$= 100,000 (5 - x + 2.6\sqrt{x^2 + 9}) \text{ ש"ח}$$

$$f'(x) = 100,000 \left(-1 + \frac{2x \cdot 2.6}{2\sqrt{x^2 + 9}} \right) \quad (ii)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -1 + \frac{2x \cdot 2.6}{2\sqrt{x^2 + 9}} = 0$$

$$2.6x = \sqrt{x^2 + 9}, \quad (x > 0)$$

נעלה בריבוע את שני האגפים ונקבל:

$$6.76x^2 = x^2 + 9 \Rightarrow x = \pm 1.25$$

$$x > 0 \Rightarrow x = 1.25$$

X	x = 0	0 < x < 1.25	x = 1.25	x > 1.25
f'(x)	תחום	-	0	+
f(x)	אי-הגדרה	↘	min	↗

$$f'(1) = 100,000 \left(-1 + \frac{2.6}{\sqrt{10}} \right) < 0$$

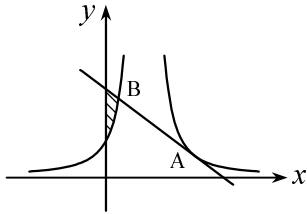
$$f'(2) = 100,000 \left(-1 + \frac{2.6 \cdot 2}{\sqrt{13}} \right) > 0$$

כלומר, עבור $x = 1.25$ הפונקציה $f(x)$ מקבלת ערך מינימלי.

והעלות הכוללת של הנחת הכבל:

$$f_{\min} = f(1.25) = 100,000 (5 - 1.25 + 2.6\sqrt{1.25^2 + 9})$$

$$f_{\min} = 1,220,000 \text{ ש"ח}$$



$$f(x) = \frac{24}{(3-2x)^2} = 24(3-2x)^{-2} \quad (א) \quad (9)$$

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A
שווה לשיפוע של הישר הנתון.

$$50y + 75x + 27 = 0$$

$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{27}{50} \Rightarrow m = -1.5 \Rightarrow f'(x_A) = -1.5$$

$$f'(x) = -48(3-2x)^{-3} \cdot (-2) = 96(3-2x)^{-3} = \frac{96}{(3-2x)^3}$$

$$\frac{96}{(3-2x)^3} = -\frac{3}{2} \Rightarrow (3-2x)^3 = -64$$

$$3-2x = -4 \Rightarrow x_A = -3.5$$

$$y_A = f(x_A) = f(3.5) = \frac{24}{(3-7)^2} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \Rightarrow A(3.5, 1.5)$$

$$y - 1.5 = -1.5(x - 3.5) \Rightarrow y = -1.5x + 6.75 \quad \text{משוואת המשיק:}$$

$$y_B = 6 \Rightarrow 6 = -1.5x + 6.75 \Rightarrow x_B = 0.5 \Rightarrow B(0.5, 6) \quad (i) \quad (ב)$$

$$S = \int_0^{0.5} [-1.5x + 6.75 - 24(3-2x)^{-2}] dx = \quad (ii)$$

$$= \frac{-1.5x^2}{2} + 6.75x + \left(\frac{24(3-2x)^{-1}}{-2} \right) \Big|_0^{0.5} =$$

$$= \left(\frac{-1.5 \cdot 0.25}{2} + 6.75 \cdot 0.5 - \frac{12}{3-1} \right) - \left(0 + 0 - \frac{12}{3} \right) =$$

$$= -\frac{3}{16} + 3\frac{3}{8} - 6 + 4 = 1\frac{3}{16} \quad \text{יחידות שטח}$$

גבי יקואל

משוב צת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

♦ לכל הכיתות ♦ לכל השאלונים ♦ לכל הרמות