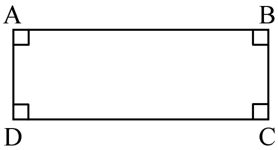
פתרון מבחן מס' 14 (ספר לימוד – שאלון 035804)

09-05-2017



(1) (א) נסמן ב- x ס"מ את אורך צלע AB (ו- CD),

ואז: $\mathrm{AD} = \mathrm{BC} = \frac{350}{x}$ ס"מ.

אורכי צלעות בסיס התיבה:

$(x-8)$ ס"מ ו- $\left(\frac{350}{x}-8\right)$ ס"מ.

גובה התיבה: 4 ס"מ.

מהנתון כי נפח התיבה 408 סמ"ק, נקבל את המשוואה:

$$\left(x-8\right)\left(\frac{350}{x}-8\right)\cdot 4 = 408 \quad /:4$$

$$350 - 8x - \frac{2{,}800}{x} + 64 = 102 \quad /\cdot x$$

$$350x - 8x^2 - 2{,}800 + 64x = 102x$$

$$0 = 8x^2 - 312x + 2{,}800 \quad /:8$$

$$x^2 - 39x + 350 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{39 \pm \sqrt{1{,}521 - 1{,}400}}{2} = \frac{39 \pm 11}{2} \quad \begin{matrix} x_1 = 25 \\ x_2 = 14 \end{matrix}$$

צלעות הבסיס: $x = 25 \Rightarrow x - 8 = 17$ ס"מ

$\frac{350}{x} - 8 = 6$ ס"מ

צלעות הבסיס: $x = 14 \Rightarrow x - 8 = 6$ ס"מ

$\frac{350}{x} - 8 = 17$ ס"מ

תשובה: ממדי בסיס התיבה 17 ס"מ ו- 6 ס"מ.

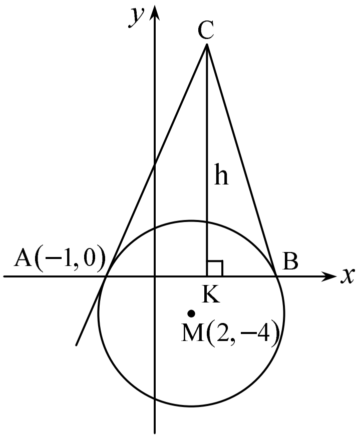
(ב) $S_{\text{פנים}} = 17\cdot 6 + 2\cdot 17\cdot 4 + 2\cdot 6\cdot 4 = 286$ סמ"ר

(ג) $\mathrm{D} = \sqrt{17^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{341} \approx 18.47$ ס"מ

(2) (א) מרכז המעגל בנקודה $(2,-4)$

ורדיוסו 5 לכן משוואתו:

$$(x-2)^2+(y+4)^2=25$$



(ב) נמצא את שיעורי ה- x של נקודות A ו- B.

$$(x-2)^2+4^2=25 \;\Rightarrow\; (x-2)^2=9$$

$$x-2=-3 \;\Rightarrow\; x_{\text{A}}=-1$$

$$x-2=3 \;\Rightarrow\; x_{\text{B}}=5$$

$$\text{m}_{\text{AM}}=\frac{0+4}{-1-2}=\frac{-4}{3}$$

המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה, לכן:

$$\text{m}_{\text{AM}}\cdot\text{m}_{\text{משיק בנקודה A}}=-1 \;\Rightarrow\; \text{m}_{\text{משיק בנקודה A}}=\frac{3}{4}$$

משוואת המשיק: $y-0=\frac{3}{4}(x+1)$

כלומר: $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$ (או $4y=3x+3$)

(ג) נסמן $x_{\text{C}}=\text{t}$ ($\text{t}>0$) ואז: $y_{\text{C}}=\frac{3}{4}\text{t}+\frac{3}{4}$

$$S_{\Delta\text{ABC}}=18 \;\Rightarrow\; \frac{\text{AB}\cdot\text{h}}{2}=18 \;\Rightarrow\; \frac{(5+1)\cdot(\frac{3}{4}\text{t}+\frac{3}{4})}{2}=18 \;\Rightarrow$$

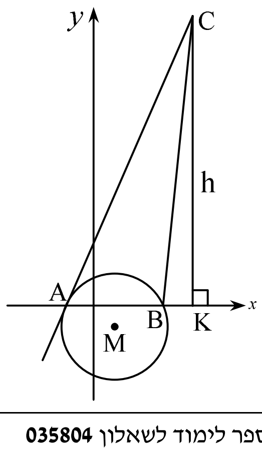
$$\Rightarrow\; \frac{3}{4}\text{t}+\frac{3}{4}=6 \;\Rightarrow\; \frac{3}{4}\text{t}=5\frac{1}{4} \quad /:\frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \text{t}=7 \;\Rightarrow\; \text{C}(7,6)$$

(ד) ציר ה- x $\perp$ CK לכן $\text{K}(7,0)$.

$$S_{\Delta\text{BCK}}=\frac{\text{BK}\cdot\text{CK}}{2}=\frac{(x_{\text{K}}-x_{\text{B}})\cdot(y_{\text{C}}-y_{\text{K}})}{2}$$

כלומר: $S_{\Delta\text{BCK}}=\frac{\text{BK}\cdot\text{CK}}{2}=\frac{(7-5)\cdot(6-0)}{2}=$ 6 יחידות שטח

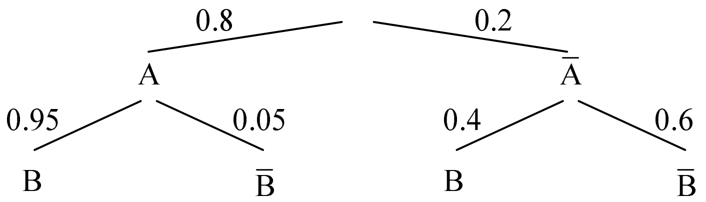
הערה: הנקודה K נמצאת מימין לנקודה B
ולא כמו בסקיצה למעלה.
(ראו סקיצה משמאל).



(3) נסמן: A – המכונה ווסתה, B – אטימה מוחלטת.

נתון: $P(A)=0.8\ ,\ P(B/A)=0.95\ ,\ P(B/\bar{A})=0.4$

נבנה עץ הסתברויות:



(א) *(i)*

$$P(\text{אטומות }3)=P(\text{אטומות }3/A)+P(\text{אטומות }3/\bar{A})=$$
$$=0.95^3\cdot 0.8+0.4^3\cdot 0.2=0.6987$$

(ii)

$$P(A/\text{אטומות }3)=\frac{P(\text{אטומות }3\cap A)}{0.6987}=\frac{0.95^3\cdot 0.8}{0.6987}\approx 0.98168$$

(ב) נסמן: A – החודש יגדלו המכירות של קופסאות בגודל A,

B – החודש יגדלו המכירות של קופסאות בגודל B.

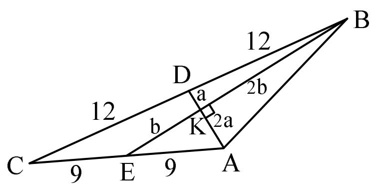
נתון:

$$P(A)=0.5\ ,\ P(B)=0.6\ ,\ P(A\cap B)=0.3$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.5+0.6-0.3=0.8$$

(4) נתון: $AE=CE\ ,\ BD=CD$,

$AD\perp BE\ ,\ BC=24$ ס"מ ,

$AC=18$ ס"מ .



נסמן: K – נקודת חיתוך התיכונים,

$AD=3a\ ,\ BE=3b$.

נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$, לכן:

$$KD=a\ ,\ AK=2a\ ,\ KE=b\ ,\ BK=2b$$

לפי משפט פיתגורס ב- ΔAKE :

$$(2a)^2+b^2=9^2\ \Rightarrow\ 4a^2+b^2=81$$

לפי משפט פיתגורס ב- ΔBKD :

$$a^2+(2b)^2=12^2\ \Rightarrow\ a^2+4b^2=144$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

נקבל מערכת משוואות:

$$+\begin{cases} 4a^2+b^2=81 \\ a^2+4b^2=144 \end{cases}$$

$$5a^2+5b^2=225 \quad /:5 \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2=45$$

לפי משפט פיתגורס ב- ΔABK:

$$(2a)^2+(2b)^2=AB^2$$

$$AB^2=4a^2+4b^2=4(a^2+b^2)=4\cdot 45=180$$

כלומר:

$$AB=\sqrt{180}=\sqrt{9\cdot 4\cdot 5}=3\cdot 2\cdot \sqrt{5}=6\sqrt{5}\ \text{ס"מ}$$

(5) (א) $\measuredangle ABE=\measuredangle EDC$ (זוויות מתחלפות בין מקבילים)

$\measuredangle BAE=\measuredangle ECD$ (שוות זו לזו)

$$\Downarrow$$

$\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (לפי משפט דמיון ז.ז.)

$$\Downarrow$$

$\left(\frac{AB}{DC}\right)^2=\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta EDC}}$ (שטחים של משולשים דומים מתייחסים זה לזה כריבוע היחס בין הצלעות המתאימות)

$$\Downarrow$$

$\left(\frac{AB}{DC}\right)^2=\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{DC}=\sqrt{\frac{x}{y}}$ מ.ש.ל.

(ב) (i) $\frac{CE}{EA}=\frac{DC}{AB}=\frac{1}{\frac{DC}{AB}}$ (פרופורציה בין צלעות מתאימות במשולשים דומים)

$$\frac{CE}{EA}=\sqrt{\frac{y}{x}}$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$\frac{S_{\Delta BCE}}{S_{\Delta ABE}} = \frac{CE}{EA} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ (שטחים של משולשים בעלי גובה משותף

מתייחסים כמו הצלעות אליהן יורד

הגובה המשותף)

$\Downarrow$

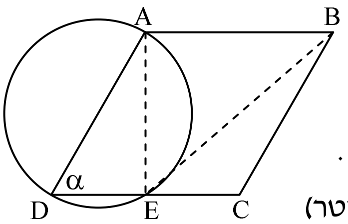
$S_{\Delta BCE} = S_{\Delta ABE} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = x \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \sqrt{xy}$ סמ"ר מ.ש.ל.

(*ii*) באותה דרך כמו בסעיף (ב) (*i*) : $\frac{S_{\Delta DCE}}{S_{\Delta ADE}} = \frac{CE}{EA} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

$\frac{y}{S_{\Delta ADE}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \Rightarrow S_{\Delta ADE} = \sqrt{xy} = S_{\Delta BEC}$

(*iii*) $S_{ABCD} = S_{\Delta ABE} + S_{\Delta BEC} + S_{\Delta ADE} + S_{\Delta DEC} =$

$= x + 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$ סמ"ר



(6) (א) נתון: $AB = BC = CD = AD = k$,

$\measuredangle ADC = \alpha$ $(0° < \alpha < 90°)$.

יש לבטא את DE ו- CE באמצעות k ו- α .

$\measuredangle AED = 90°$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר)

ב- ΔADE : $\cos\measuredangle D = \frac{DE}{AD}$

$DE = AD\cos\alpha = k\cos\alpha$ יחידות אורך

ואז: $CE = CD - DE = k - k\cos\alpha = k(1-\cos\alpha)$ יחידות אורך

(ב) נתון: $BE = \frac{\sqrt{7}}{2}k$. יש לחשב את α .

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔBEC :

$BE^2 = BC^2 + CE^2 - 2 \cdot BC \cdot CE \cdot \cos\measuredangle C$

$\measuredangle C = 180° - \alpha$, כי סכום שתי זוויות סמוכות במעוין שווה ל- 180°

וכן $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, ואז:

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

$$\left(\tfrac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{k}\right)^2 = \mathrm{k}^2 + \mathrm{k}^2(1-\cos\alpha)^2 + 2\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}\cdot(1-\cos\alpha)\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{7\mathrm{k}^2}{4} = \mathrm{k}^2 + \mathrm{k}^2(1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha) + 2\mathrm{k}^2(1-\cos\alpha)\cdot\cos\alpha$$

נחלק ב- $\mathrm{k}^2 \neq 0$ ונקבל:

$$\tfrac{7}{4} = 2 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 2\cos^2\alpha \quad\Rightarrow\quad \cos^2\alpha = \tfrac{1}{4}$$

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \pm 60^\circ + 360^\circ\cdot \mathrm{n} \ ,\ \mathrm{n}\in\mathbb{Z}$$

$$\cos\alpha = -\tfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \pm 120^\circ + 360^\circ\cdot \mathrm{k} \ ,\ \mathrm{k}\in\mathbb{Z}$$

לפי הנתון $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, נקבל: $\alpha = 60^\circ$.

(ג)

$$S_{\Delta BCE} = \frac{BC\cdot CE\cdot \sin\measuredangle C}{2} = \frac{\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}(1-\cos\alpha)\cdot\sin(180^\circ-\alpha)}{2} =$$

$$= \frac{\mathrm{k}^2}{2}(1-\cos 60^\circ)\cdot\sin 120^\circ =$$

$$= \frac{\mathrm{k}^2}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{k}^2}{8}$$ יחידות שטח

(7) (א) $f(x) = \dfrac{24(x^2+2x)}{(x+\mathrm{a})(x^2+\mathrm{b})}$, $\mathrm{b}>0$, $x\neq -2$

מכיוון שתחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x\neq -2$ הרי שעבור $x=-2$

המכנה מתאפס, כלומר: $(-2+\mathrm{a})(4+\mathrm{b}) = 0$

כלומר $\mathrm{a}=2$ (הפתרון $\mathrm{b}=-4$ מתבטל כי נתון $\mathrm{b}>0$), ואז:

$$f(x) = \frac{24(x^2+2x)}{(x+2)(x^2+\mathrm{b})} = \frac{24x(x+2)}{(x+2)(x^2+\mathrm{b})} = \frac{24x}{x^2+\mathrm{b}} \ ,\ (x\neq -2)$$

(ב) נתון כי: $f'(0)=6$, $f'(2)=0$.

$$f'(x) = \frac{24(x^2+\mathrm{b}) - 24x\cdot 2x}{(x^2+\mathrm{b})^2} = \frac{24(x^2+\mathrm{b}-2x^2)}{(x^2+\mathrm{b})^2} = 24\cdot\frac{\mathrm{b}-x^2}{(x^2+\mathrm{b})^2}$$

$$f'(0) = \frac{24\mathrm{b}}{\mathrm{b}^2} = \frac{24}{\mathrm{b}} = 6 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{b}=4$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ג) $f(x)=\frac{24x}{x^2+4}$

$S=\int_0^2 f'(x)\,dx=f(x)\Big|_0^2=\frac{24\cdot 2}{2^2+4}-0=$ 6 יחידות שטח

(ד) (*i*) $y=0 \;\Rightarrow\; x=0 \;,\; x=0 \;\Rightarrow\; y=0$

לכן $(0,0)$ היא נקודת החיתוך של גרף $f(x)$ עם הצירים.

(*ii*) לפי הגרף של $f'(x)$: $f(2)=\frac{24\cdot 2}{2^2+4}=6 \;,\; f'(2)=0$

כלומר $(2,6)$ נקודה חשודה לקיצון.

עבור $-2<x<2$ הנגזרת חיובית ועבור $x>2$ הנגזרת שלילית,

לכן $\max(2,6)$.

(*iii*) המעריך הגדול במונה קטן מהמעריך הגדול במכנה ולכן משוואת

האסימפטוטה האופקית לגרף $f(x)$ היא $y=0$.

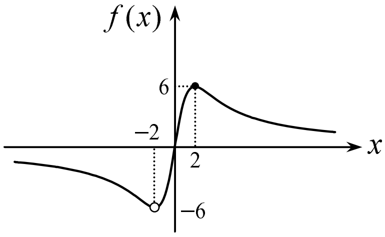
($\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$).

(*iv*) $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית $f(-x)=-f(x)$

(אם לא מתייחסים לנקודת "חור"

כאשר $x=-2$)

ולכן גרף הפונקציה $f(x)$:



(8) (א) $f(x)=x^3-3a^2x+5a^2 \;,\; a>0$

$f'(x)=3x^2-3a^2$

$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 3\left(x^2-a^2\right)=0 \;\Rightarrow\; x_1=a \;,\; x_2=-a$

$y_1=a^3-3a^3+5a^2 \quad , \quad y_2=-a^3+3a^3+5a^2$

$y_1=5a^2-2a^3 \quad , \quad y_2=5a^2+2a^3$

$f''(x)=6x \;\Rightarrow\; f''(a)=6a \;,\; f''(-a)=-6a$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

מכיוון ש- $a > 0$, הרי ש- $\max(-a, 5a^2 + 2a^3)$, $\min(a, 5a^2 - 2a^3)$

כלומר: $x_{\min} = a$, $x_{\max} = -a$

ואז: $f(x_{\min}) = 5a^2 - 2a^3$, $f(x_{\max}) = 5a^2 + 2a^3$

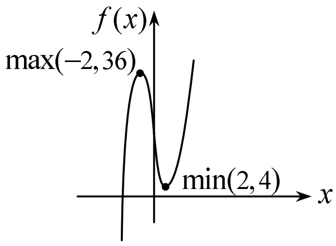
(ב) $5a^2 + 2a^3 - \left(5a^2 - 2a^3\right) = 32$

$4a^3 = 32 \;\Rightarrow\; a^3 = 8 \;\Rightarrow\; a = 2$

(ג) $f(x) = x^3 - 12x + 20$

וגם נקבל: $\max(-2,36)$, $\min(2,4)$

נסרטט גרף של $f(x)$.



לפי הגרף יש נקודת חיתוך אחת

עם ציר ה- x (בתחום $x < -2$).

(ד) נתון: $g(x) = \sqrt{f(x)}$, $f(-4.1072) = 0$

(i) תחום הגדרה: $f(x) \ge 0 \;\Rightarrow\; x \ge -4.1072$

(ii) נקודת מקסימום של $g(x)$:

$x = -2 \;\Rightarrow\; y = \sqrt{f(-2)} = \sqrt{36} = 6$

כלומר: $(-2,6)$.

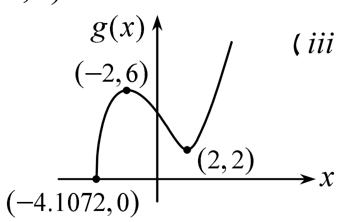
נקודת מינימום של $g(x)$: $x = 2 \;\Rightarrow\; y = \sqrt{f(2)} = \sqrt{4} = 2$

כלומר: $(2,2)$.

בנוסף גם נקודת הקצה היא נקודת מינימום, ולכן:

$\min(-4.1072,0)$, $\min(2,2)$, $\max(-2,6)$

(iii)



(9) $g(x)=\sqrt{x-2}\ ,\ f(x)=\frac{12}{\sqrt{x-2}}$

(א) תחום הגדרה של $f(x)$: $x-2>0 \ \Rightarrow\ x>2$

תחום הגדרה של $g(x)$: $x-2\geq 0 \ \Rightarrow\ x\geq 2$

(ב) $f(x)=g(x) \ \Rightarrow\ \frac{12}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{x-2} \ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 12=x-2 \ \Rightarrow\ x=14$

ואז : $x=14 \ \Rightarrow\ y=\frac{12}{\sqrt{12}}=\sqrt{12}$

כלומר נקודת החיתוך : $(14,\sqrt{12})$ או $(14,2\sqrt{3})$

(ג) (i) נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודות L ו- M .

תחום הגדרה $4\leq t\leq 14$.

פונקציית המטרה (שטח המלבן) : $S(t)=LM\cdot MN$

$y_L=f(t)=\frac{12}{\sqrt{t-2}}\ ,\ y_M=g(t)=\sqrt{t-2}$

$S(t)=(y_L-y_M)\cdot(x_L-x_K)=\left(\frac{12}{\sqrt{t-2}}-\sqrt{t-2}\right)\left(t-4\right)$

$S(t)=\frac{12-(t-2)}{\sqrt{t-2}}\cdot(t-4)=\frac{(14-t)(t-4)}{\sqrt{t-2}}=\frac{-t^2+18t-56}{\sqrt{t-2}}$

$S'(t)=\frac{\left(-2t+18\right)\sqrt{t-2}-\left(-t^2+18t-56\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{t-2}}}{t-2}$

$S'(t)=\frac{2\,(-2t+18)\,(t-2)+t^2-18t+56}{2\,\sqrt{t-2}\cdot(t-2)}=\frac{-3t^2+26t-16}{2\,\sqrt{t-2}\cdot(t-2)}$

נסמן : $\frac{-3t^2+26t-16}{2\,\sqrt{t-2}\cdot(t-2)}=\frac{A(t)}{B(t)}$

$S'(t)=0 \ \Rightarrow\ -3t^2+26t-16=0$

$t_{1,2}=\frac{-26\pm\sqrt{26^2-4\cdot 3\cdot 16}}{-6}=\frac{-26\pm 22}{-6}$ ↗ $t_1=\frac{2}{3}$ ↘ $t_1=8$

$t=\frac{2}{3}$ אינו בתחום ההגדרה, לכן $t=8$.

בנקודה החשודה לקיצון, הסימן של S'' הוא כמו הסימן של $A'(t)$

כי $B'(t)$ חיובי לכל t בתחום ההגדרה.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$A(t) = -3t^2 + 26t - 16$$

$$A'(t) = -6t + 26 \quad \Rightarrow \quad A'(8) = -48 + 26 < 0 \quad \Rightarrow \quad \max$$

כלומר השטח מקסימלי כאשר $t = 8$.

כלומר $L\left(8, \frac{12}{\sqrt{6}}\right)$ או $L(8, 2\sqrt{6})$.

(*ii*) השטח המקסימלי:

$$S_{\underset{\text{מקסימלי}}{KLMN}} = S(8) = \frac{-8^2 + 18 \cdot 8 - 56}{\sqrt{8-2}} = \frac{24}{\sqrt{6}} = 4\sqrt{6} \text{ יחידות שטח}$$

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929