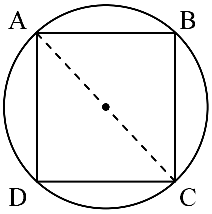
פתרון מבחן מס' 13 (ספר לימוד – שאלון 035804)

09-05-2017

(1) (א) נתון: $R=5$, $2(AB+BC)=24 \Rightarrow AB+BC=12$.



נסמן: $AB=x$, ואז: $BC=12-x$.

לפי משפט פיתגורס ב- ΔABC :

$$10^2=x^2+(12-x)^2$$
$$100=2x^2-24x+144 \quad /:2$$
$$x^2-12x+22=0$$

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144-88}}{2}=\frac{12\pm\sqrt{56}}{2}=6\pm\sqrt{14} \quad\Rightarrow\quad 12-x=6\mp\sqrt{14}$$

תשובה: אורכי צלעות המלבן הם $6+\sqrt{14}$ ו- $6-\sqrt{14}$.

(ב) (i) נתון: $2(AB+BC)=4\sqrt{2}\,a$.

נסמן: $AB=x$, ואז $BC=2\sqrt{2}\,a-x$.

לפי משפט פיתגורס ב- ΔABC :

$$AC^2=AB^2+BC^2$$
$$(2a)^2=x^2+(2\sqrt{2}\,a-x)^2$$
$$4a^2=x^2+x^2-4\sqrt{2}\,ax+8a^2 \quad /:2 \quad\Rightarrow\quad x^2-2\sqrt{2}\,ax+2a^2=0$$
$$x_{1,2}=\frac{2\sqrt{2}\,a\pm\sqrt{8a^2-8a^2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}\,a}{2}=\sqrt{2}\,a$$
$$AB=\sqrt{2}\,a \quad\Rightarrow\quad BC=2\sqrt{2}\,a-\sqrt{2}\,a=\sqrt{2}\,a$$

כלומר ABCD הוא ריבוע שאורך צלעו $\sqrt{2}\,a$.

(ii) נפתור בדרך דומה לסעיפים קודמים ונקבל:

($a=0.2b \Rightarrow b=5a$):

$$(2a)^2=x^2+(0.5b-x)^2 \quad\Rightarrow\quad (2a)^2=x^2+(2.5a-x)^2$$
$$4a^2=2x^2-5ax+6.25a^2 \quad\Rightarrow\quad 2x^2-5ax+2.25a^2=0$$
$$x_{1,2}=\frac{5a\pm\sqrt{25a^2-4\cdot 2\cdot 2.25a^2}}{4}=\frac{5a\pm\sqrt{7a^2}}{4}=$$
$$=\frac{5a\pm\sqrt{7}\,a}{4}=\frac{a}{4}\left(5\pm\sqrt{7}\right)$$
$$2.5a-x=\frac{10a}{4}-\frac{5a\pm\sqrt{7}a}{4}=\frac{5a\mp\sqrt{7}a}{4}$$

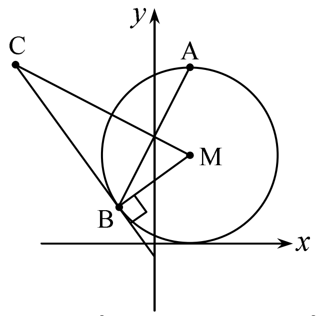
לכן אורכי צלעות המלבן הם: $\frac{a}{4}\left(5+\sqrt{7}\right)$ ו- $\frac{a}{4}\left(5-\sqrt{7}\right)$.

(2) (א) $(x-2)^2+(y-5)^2=25$

כדי למצוא את שיעורי נקודות החיתוך A ו- B

יש לפתור מערכת משוואות:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-5)^2=25\\ y=2x+6\end{cases}$$



נקבל:

$$(x-2)^2+(2x+6-5)^2=25$$

$$x^2-4x+4+4x^2+4x+1-25=0$$

$$5x^2=20 \;\Rightarrow\; x^2=4 \;\Rightarrow\; x_1=2 \;,\; x_2=-2$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$y_1=2\cdot2+6=10 \;,\; y_2=2\cdot(-2)+6=2$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$A(2,10)\;,\;B(-2,2)$ (A נמצאת ברביע הראשון)

(ב) משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

(משיק) $\perp$ BM ולכן: $m_{\text{משיק}}\cdot m_{BM}=-1$

$B(-2,2)\;,\;M(2,5)$ ולכן: $m_{BM}=\frac{5-2}{2+2}=\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}\cdot m_{\text{משיק}}=-1$ כלומר: $m_{\text{משיק}}=-\frac{4}{3}$

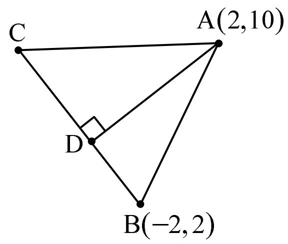
משוואת המשיק: $y-2=-\frac{4}{3}(x+2)$

כלומר: $y=-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$

(ג) לפי משפט פיתגורס ב- ΔBCM : $(BM=R=5)$

$$CM^2=BC^2+BM^2 \;\Rightarrow\; BC=\sqrt{125-25}=\sqrt{100}$$

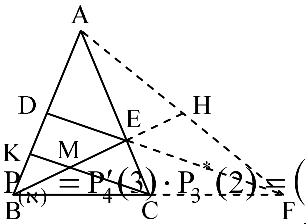
BC = 10 יחידות אורך



(ד) $m_{AD}=m_{BM}=\frac{3}{4}$

משוואת AD : $y-10=\frac{3}{4}(x-2)$

כלומר: $y=\frac{3}{4}x+8\frac{1}{2}$



(3) נסמן ב- P' את ההסתברות שמורה (גבר) מרוצה.

ונסמן ב- P^* את ההסתברות שמורה (אישה) מרוצה.

נתון: $P' = 0.8 \;,\; P^* = 0.7$.

(א) $P_{(\text{א})} = P_4'(3)\cdot P_3^*(2) = \binom{4}{3}\cdot 0.8^3\cdot 0.2^1\cdot\binom{3}{2}\cdot 0.7^2\cdot 0.3^1 =$

$= 4\cdot 0.512\cdot 0.2\cdot 3\cdot 0.49\cdot 0.3 \approx 0.181$

(ב) $P_{(\text{ב})} = P_4'(0)\cdot P_3^*(0) = 0.2^4\cdot 0.3^3 = 0.0000432$

(ג) $P_{(\text{ג})} = 1 - P_{(\text{ב})} = 1 - 0.0000432 = 0.9999568$

(4) (א) נתון: $AB = AC \;,\; AD = BD$,

$AE = 2\cdot EC \;,\; KC \parallel DE$.

צ"ל: $BK = KD$.

$ED \parallel CK$ (נתון)

$\Downarrow$

$\frac{AD}{DK} = \frac{AE}{EC}$ (לפי משפט תאלס)

$\Downarrow$

$DK = \frac{1}{2}AD$ (הצבה של הנתון $AE = 2\cdot EC$)

$BK = BD - DK$ (חיסור קטעים)

$BK = AD - \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AD$ (הצבת הנתון: $AD = BD$, $DK = \frac{1}{2}AD$)

$\Downarrow$

$BK = KD$ מ.ש.ל (א)

(ב) KC הוא קטע אמצעים במשולש BDF (קטע החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שנייה, חוצה גם את הצלע השלישית)

$\Downarrow$

$BC = CF$ (קטע אמצעים במשולש עובר דרך אמצעי שתי צלעותיו). מ.ש.ל (ב)

(ג) הנקודות D ו- C הן אמצעי הצלעות AB ו- BF ב- ΔABF בהתאמה,
ולכן AC ו- FD הם תיכונים ב- ΔABF ו- E נקודת חיתוך התיכונים.
מכאן נובע ש- BH גם הוא תיכון ב- ΔABF .

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$BE = 2 \cdot EH$ (נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$)

KM קטע אמצעים ב- ΔDBE (קטע החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שנייה, חוצה את הצלע השלישית)

$\Downarrow$

$BM = ME$ (קטע אמצעים במשולש עובר דרך אמצעי שתי צלעותיו).

$BE = BM + ME = 2 \cdot BM$ (חיבור קטעים, הצבה)

$\Downarrow$

$EH = \frac{1}{2} BE = BM = ME$ (הצבה + שימוש ב- $BE = 2 \cdot BM$).

מ.ש.ל (ג)

(5) נתון: $AB \parallel FC$, $AF \parallel BE$, $AD \parallel BC$.

$\Downarrow$

(א) $ABCD$ ו- $ABEF$ מקביליות — לפי הגדרת המקבילית: מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות זו לזו.

$\Downarrow$

$DC = FE$

(ב) נתון: $AM = MD$

$\Delta ABM \sim \Delta DME$ — לפי משפט דמיון ז.ז. (זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות זו לזו וזוויות קדקודיות שוות זו לזו).

$\frac{AB}{ED} = \frac{AM}{MD} = 1$ — פרופורציה בין צלעות מתאימות במשולשים דומים.

$\Downarrow$

$AB = ED$

$\Downarrow$

$FE = ED = DC \; (= AB)$ — לפי השוויון שקיבלנו בסעיף (א).

מ.ש.ל. (ב).

המשך בעמוד הבא >>>

(ג) (*i*) מקדם דמיון בין משולשים ABM , MED $\qquad k = \frac{AM}{MD} = 1$

כלומר שטחיהם שווים אז המשולשים חופפים : $S_{\Delta ABM} = S$

(*ii*) ME הוא קטע אמצעים ב- ΔADF אז $\Delta MED \sim \Delta AFD$

ומקדם הדמיון הוא : $\frac{DM}{DA} = \frac{1}{2}$

אז היחס בין השטחים : $\frac{S_{\Delta MED}}{S_{\Delta DAF}} = k^2 = \frac{1}{4} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{S}{S_{\Delta BCD}} = \frac{1}{4}$

$S_{\Delta ADF} = 4S$

$S_{AMEF} = S_{\Delta DAF} - S_{\Delta MED} = 4S - S = 3S$

(*iii*) באותה הדרך כמו בסעיף (*ii*): $S_{DMDC} = 3S$

(*iv*) $S_{ABCF} = S_{\Delta BEC} + S_{AMEF} + S_{\Delta ABM} = 4S + 3S + S = 8S$

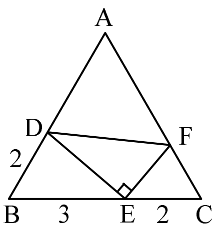
(6) (א) נתון : $AB = BC = AC$,

$\sphericalangle DEF = 90°$, 2 ס״מ $= EC$,

3 ס״מ $= BE$, 2 ס״מ $= BD$,

במשולש שווה-צלעות כל זווית בת $60°$.

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔBDE :



$$DE^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60°$$

$$DE^2 = 4 + 9 - 12 \cdot \tfrac{1}{2} = 7 \;\; \Rightarrow \;\; DF = \sqrt{7} \text{ ס״מ}$$

(ב) נמצא קודם את $\sphericalangle DEB$ לפי משפט הסינוסים ב- ΔBDE :

$$\frac{\sqrt{7}}{\sin 60°} = \frac{2}{\sin\sphericalangle DEB}$$

כלומר : $\sin\sphericalangle DEB = \frac{2 \cdot \sin 60°}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

מכאן נקבל : $\sphericalangle BED = 40.893°$

סכום הזוויות ב- ΔCEF הוא $180°$:

$$\sphericalangle FEC = 180° - 90° - 40.893° = 49.107°$$

ואז : $\sphericalangle EFC = 180° - 60° - 49.107° = 70.893°$

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

לפי משפט הסינוסים ב- ΔECF :

$$\frac{FC}{\sin 49.107^\circ} = \frac{2}{\sin 70.893^\circ} \Rightarrow FC = 1.6 \text{ ס"מ}$$

(ג) לפי משפט הסינוסים ב- ΔCEF :
$$\frac{EF}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin 70.893^\circ}$$

מכאן נקבל:
$$EF = 1.833 \text{ ס"מ}$$

לפי משפט פיתגורס ב- ΔEDF :
$$DF = \sqrt{7 + 1.833^2} = 3.219 \text{ ס"מ}$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔADF :

$$\frac{DF}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow R = \frac{3.219}{\sqrt{3}} = 1.858 \text{ ס"מ}$$

(7) (א) תחום הגדרה $x \neq 0$ (מכנה $0 \neq$)

(ב)
$$m_{\text{משיק}} = f'(x)$$
$$f'(x) = x + \frac{4}{x^2}$$

פונקציית המטרה היא שיפוע המשיק:
$$M(a) = a + \frac{4}{a^2} = a + 4a^{-2}$$

$$M'(a) = 1 - 8a^{-3} = 1 - \frac{8}{a^3}$$

$$M'(a) = 0 \Rightarrow \frac{8}{a^3} = 1 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

$$M''(a) = 24a^{-4} = \frac{24}{a^4}$$

$$M''(2) = \frac{24}{2^4} > 0 \Rightarrow \min$$

השיפוע המינימלי:
$$M(2) = 2 + \frac{4}{2^2} = 2 + 1 = 3$$

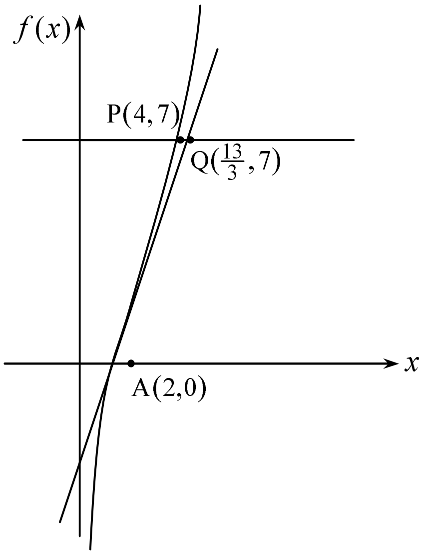
(ג)
$$x = 2 \Rightarrow y = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{4}{2} = 2 - 2 = 0$$

נקודת השקה $(2,0)$, שיפוע משיק $m = 3$,

לכן משוואת המשיק:
$$y - 0 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 6$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ד) (i)



$x_P = 4$

$y_P = \frac{4^2}{2} - \frac{4}{4} = 7 \Rightarrow P(4,7)$

$y_Q = 7 \quad \Rightarrow \quad 7 = 3x_Q - 6$

$x_Q = \frac{13}{3} \quad \Rightarrow \quad Q\left(\frac{13}{3}, 7\right)$

(ii) נסמן ב- A את נקודת ההשקה :

$A(2,0)$

$m_{AP} = \frac{7-0}{4-2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

משוואת הישר AP :

$y - 0 = 3\frac{1}{2}(x-2)$

$y = 3\frac{1}{2}x - 7$

(iii) צריך להוכיח שעבור $x > 2$ מתקיים : $y_{AP} > y_{\text{משיק}}$.

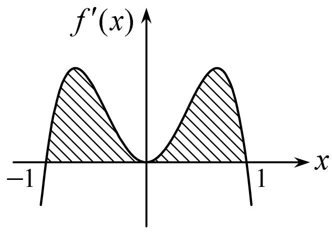
נבדוק באיזה תחום מתקיים : $y_{AP} > y_{\text{משיק}}$:

$3\frac{1}{2}x - 7 > 3x - 6$

$\frac{1}{2}x > 1 \quad \Rightarrow \quad x > 2$

כלומר בתחום $x > 2$ מתקיים $y_{AP} > y_{\text{משיק}}$.

(8) (א) $f'(x) = ax^4 + bx^2$



נתון : $S_{\text{מקווקו}} = 4$ יחידות שטח

$f'(0) = 0 \ , \ f'(\pm 1) = 0$

$f'(\pm 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 1 + b \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b = 0 \quad ①$

$S = 4 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} (ax^4 + bx^2)\,dx = 4 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{ax^5}{5} + \frac{bx^3}{3}\right|_{-1}^{1} = 4$

$\frac{a}{5} + \frac{b}{3} - \left(-\frac{a}{5} - \frac{b}{3}\right) = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{5} + \frac{b}{3} = 2 \quad \Rightarrow \quad 3a + 5b = 30 \quad ②$

המשך בעמוד הבא ‹‹‹

נפתור מערכת משוואות ② , ① :
$$\begin{cases} 3a+5b=30 \\ a+b=0 \ \Rightarrow \ b=-a \end{cases}$$

$$3a-5a=30 \ \Rightarrow \ a=-15 \ , \ b=15$$

ב) נקודות חשודות לקיצון של $f(x)$ הן: $x=1 \ , \ x=0 \ , \ x=-1$

לפי הגרף של $f'(x)$ נסיק כי $x_{max}=1$ ולכן $f(1)=5$.

(וגם $x_{min}=-1$, $x_{\text{פיתול}}=0$) .

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-15x^4+15x^2)dx=-15\left(\tfrac{x^5}{5}-\tfrac{x^3}{3}\right)+C$$

כלומר: $f(x)=-3x^5+5x^3+c$

$$f(1)=5 \ \Rightarrow \ 5=-3+5+c \ \Rightarrow \ c=3$$

$$f(x)=-3x^5+5x^3+3$$

ג) $x=-1 \ \Rightarrow \ f(-1)=-3\cdot(-1)+5\cdot(-1)+3=1$

כלומר: $\max(1,5)$, $\min(-1,1)$.

ד) (*i*) נתון: $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx=4 \ , \ g(x)=f(x)+k$

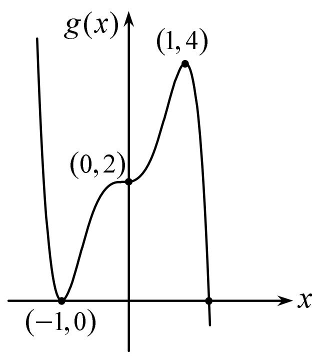
כלומר: $\int_{-1}^{1}\left(-3x^5+5x^3+3+k\right)dx=4$

$$-\frac{x^6}{2}+\frac{5x^4}{4}+(3+k)x\Big|_{-1}^{1}=4$$

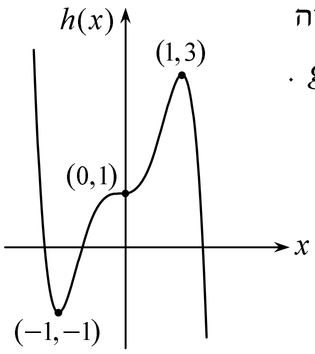
$$-\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{4}+(3+k)-\left[-\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{4}-(3+k)\right]=4$$

$$2(3+k)=4 \ \Rightarrow \ k=-1$$

(*ii*)



המשך בעמוד הבא >>>



iii) גרף הפונקציה $h(x)$ מתקבל על-ידי הזזה של יחידה אחת למטה של הגרף של $g(x)$.
כלומר :

ולכן גרף $h(x)$ חותך 3 פעמים את ציר ה- x .

(9) (א) תחום הגדרה : $f(x)=\frac{9}{\sqrt{x}}-\frac{x}{3} \;\Rightarrow\; x>0$

(ב) $f(x)=9x^{-\frac{1}{2}}-\frac{x}{3}$

$$f'(x)=-\frac{9}{2}x^{-1\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}=-\frac{9}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{3}$$

לפי תחום ההגדרה, מתקיים $x>0$, ולכן : $-\frac{9}{9x\sqrt{x}}<0$,

ואז $f'(x)<0$ לכל $x>0$, לכן הפונקציה יורדת לכל $x>0$.

(ג) שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים :

$x=0$ אינו בתחום הגדרה.

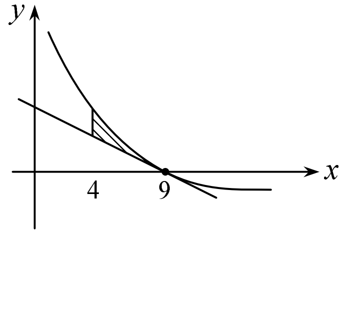
$$y=0 \;\Rightarrow\; 0=\frac{9}{\sqrt{x}}-\frac{x}{3} \;\; / \cdot 3\sqrt{x}$$

$$0=27-x\sqrt{x} \;\Rightarrow\; x\sqrt{x}=27 \;\; / \;(\;)^2$$

$$x^2\cdot x=729 \;\Rightarrow\; x^3=729 \;\Rightarrow\; x=9$$

כלומר $(9,0)$ היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(ד)



המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ה) $x=9 \;\Rightarrow\; f'(9)=-\frac{9}{2\cdot 9\cdot 3}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}$

משוואת המשיק: $y-0=-\frac{1}{2}(x-9) \;\Rightarrow\; y=-0.5x+4.5$

(ו) $S=\int_4^9\left[9x^{-\frac{1}{2}}-\frac{x}{3}-(-0.5x+4.5)\right]dx=$

$=\int_4^9\left(9x^{-\frac{1}{2}}+\frac{x}{6}-\frac{9}{2}\right)dx=18\sqrt{x}+\frac{x^2}{12}-\frac{9x}{2}\Big|_4^9=$

$=18\cdot 3+\frac{81}{12}-\frac{81}{2}-\left(18\cdot 2+\frac{16}{12}-\frac{36}{2}\right)=$ יחידות שטח $\frac{11}{12}$

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות