

פתרון מבחן מס' 11 (ספר לימוד – שאלון 035804)

09-05-2017

(1) (א) הסוחר קנה 36 מוצרים.

נסמן ב- x ש"ח את המחיר ששילם הסוחר על כל מוצר, ואז:

$$x \cdot \frac{100-p}{100} \cdot 6 \text{ המוצרים הפגומים,}$$

$$x \cdot \frac{100+p}{100} \cdot 30 \text{ ש"ח יסמן את מחיר המכירה של 30 המוצרים התקינים.}$$

נתון שהסוחר הרוויח 10%, מכאן מקבלים את המשוואה:

$$6x \cdot \frac{100-p}{100} + 30x \cdot \frac{100+p}{100} = 36x \cdot \frac{100+10}{100} \quad / \cdot 100$$

$$6x(100-p) + 30x(100+p) = 36x \cdot 110 \quad / : 6x, x \neq 0$$

$$100-p + 5(100+p) = 6 \cdot 110$$

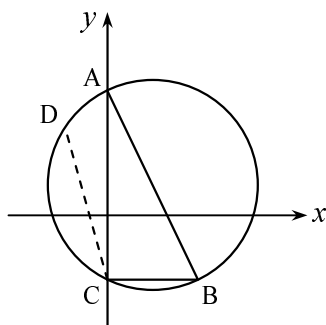
$$100-p + 500 + 5p = 660$$

$$4p = 60 \Rightarrow p = 15 \Rightarrow p\% = 15\%$$

(ב) על כל מוצר פגום הסוחר הפסיד $\frac{p}{100} \cdot x$ ש"ח, ואז:

$$\frac{15}{100} \cdot x = 6 \quad / : \frac{15}{100} \Rightarrow x = 40$$

כלומר על כל המוצרים שילם הסוחר 1,440 ש"ח = $36 \cdot 40$.



(2) (א) משוואת BC: $y = y_C \Rightarrow y = -4$

$$(b) \quad y_B = -4 \Rightarrow \frac{1}{2}(-4) + x = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_B = 6 \Rightarrow B(6, -4)$$

$$x_A = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}y + 0 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_A = 8 \Rightarrow A(0, 8)$$

: לכן, $\sphericalangle ACB = 90^\circ$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(y_A - y_C)(x_B - x_C)}{2} =$$

$$= \frac{(8+4)(6-0)}{2} = 36 \text{ יחידות שטח}$$

המשך בעמוד הבא <<<

(ii) מרחק הנקודה C מהצלע AB זה האורך של הגובה ליתר ב- ΔABC .

$$AB = \sqrt{(0-6)^2 + (8+4)^2} = \sqrt{36+144} = \\ = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \text{ יחידות אורך}$$

ניעזר בשטח ΔABC :

$$S_{\Delta ABC} = 36 = \frac{AB \cdot h_C}{2} \Rightarrow 36 = \frac{6\sqrt{5} \cdot h_C}{2}$$

$$h_C = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5} \text{ יחידות אורך} \quad \text{ואז :}$$

(iii) $\angle ACB = 90^\circ$, לכן AB הוא קוטר המעגל החוסם את ΔABC ,

כי זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר.

מרכז המעגל נמצא בנקודת אמצע הקוטר AB.

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right) = M\left(\frac{0+6}{2}, \frac{8-4}{2}\right) = M(3,2)$$

$$R^2 = AM^2 = (0-3)^2 + (8-2)^2 = 9+36 = 45$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 45 \quad \text{לכן משוואת המעגל :}$$

$$x_D = -0.6y_D \Rightarrow (-0.6y_D - 3)^2 + (y_D - 2)^2 = 45 \quad (iv)$$

$$0.36y_D^2 + 3.6y_D + 9 + y_D^2 - 4y_D + 4 = 45$$

$$1.36y_D^2 - 0.4y_D - 32 = 0$$

$$y_{D_{1,2}} = \frac{0.4 \pm \sqrt{0.4^2 + 4 \cdot 1.36 \cdot 32}}{2 \cdot 1.36} = \frac{0.4 \pm 13.2}{2.72}$$

$$y_{D_1} = 5, \quad y_{D_2} = -\frac{80}{17}$$

נתון כי D נמצאת ברביע השני, לכן $y_D > 0$.

$$y_D = 5 \Rightarrow x_D = -0.6 \cdot 5 = -3 \Rightarrow D(-3,5)$$

$$m = m_{CD} = \frac{5+4}{-3-0} = \frac{9}{-3} = -3$$

- (3) נסמן: $A =$ הכדור הראשון הוא שחור.
 $B =$ הכדור הראשון הוא לבן.
 $C =$ הכדור הראשון הוא אדום.
 $D =$ הכדור השני הוא שחור.
 $E =$ הכדור השני הוא לבן.
 $F =$ הכדור השני הוא אדום.

לפי מספר הכדורים בכד נסיק:

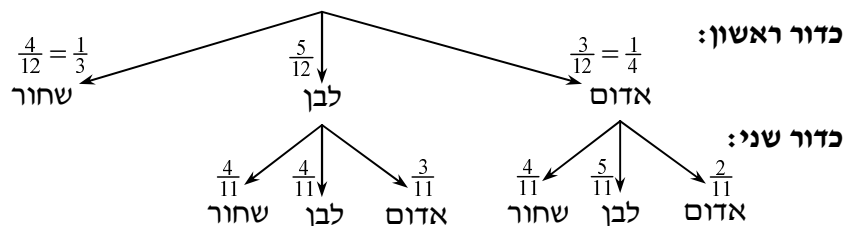
$$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{5}{12}, \quad P(C) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$P(D/A) = P(E/A) = P(F/A) = 0 \quad \text{מהנתון בשאלה נסיק:}$$

$$P(D/B) = \frac{4}{11}, \quad P(E/B) = \frac{4}{11}, \quad P(F/B) = \frac{3}{11}$$

$$P(D/C) = \frac{4}{11}, \quad P(E/C) = \frac{5}{11}, \quad P(F/C) = \frac{2}{11}$$

נבנה עץ הסתברויות:

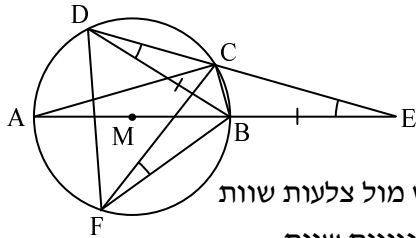


$$P(\text{שחור}) = \frac{1}{3} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{11} = \frac{19}{33} \quad \text{(א)}$$

$$P(F) = P(\text{כדור שני אדום}) = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{11} = \frac{7}{44} \quad \text{(ב)}$$

$$P(\text{כדור ראשון לבן / כדור שני אדום}) = \frac{(\text{כדור ראשון לבן וכדור שני אדום})}{(\text{כדור שני אדום})} = \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{3}{11}}{\frac{7}{44}} = \frac{5}{7} \quad \text{(ג)}$$

מסעיף (ב)



במשולש מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות.

זוויות היקפיות הנשענות על אותה הקשת שוות זו לזו.

זווית היקפית שווה למחצית הקשת שהזווית נשענת עליה.

חיסור קשתות.

זווית היקפית שווה למחצית הקשת שהזווית נשענת עליה.

זווית חיצונית למשולש שווה לסכום הזוויות הפנימיות שאינן צמודות אליה.

הצבה.

חיסור זוויות.

הצבה.

מצאנו שכל אחת מהזוויות בת 36° .

נתון.

זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת, שוות זו לזו.

זווית חיצונית (ל- $\triangle BCF$) שווה לסכום הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

הצבה.

חישוב.

כל אחת מהזוויות בת 18° .

סכום זוויות במשולש BCF הוא 180° + הצבה.

(4) (א) נתון: $BD = BE$

$\angle AED = 18^\circ$

$\angle BED = \angle BDC = 18^\circ$

$\angle BFC = \angle BDC = 18^\circ$

(ב) $\widehat{BC} = 36^\circ$

$\widehat{CDA} = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$

$\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 144^\circ = 72^\circ$

(ג) $\angle DBA = \angle BDE + \angle BED$

$\angle DBA = 18^\circ + 18^\circ = 36^\circ$

$\angle CBD = \angle ABC - \angle DBA$

$\angle CBD = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$

$\angle CBD = \angle DBA$



BD חוצה-זווית ABC

(ד) $\angle BDF = 54^\circ$

$\angle BDF = \angle BCF = 54^\circ$

$\angle CBF = \angle BCE + \angle CEB$

$72^\circ = \angle BCE + 18^\circ$

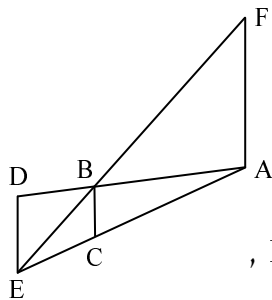
$\angle BCE = 54^\circ$

$\angle BFC = \angle BEC$

$\angle CBF = 180^\circ - 18^\circ - 54^\circ = 108^\circ$

המשך בעמוד הבא <<<

$\angle CBE = 180^\circ - 54^\circ - 18^\circ = 108^\circ$ סכום זוויות במשולש BCE
 הוא $180^\circ +$ הצבה.
 כל אחת מהזוויות בת 108° . $\angle CBF = \angle CBE$
 מצאנו שכל אחת מהזוויות בת 54° . $\angle BCE = \angle BCF$
 כל גודל שווה לעצמו. $CB = CB$
 \Downarrow
 לפי משפט חפיפה ז.צ.ז. $\triangle FCB \cong \triangle ECB$
 מ.ש.ל.



(5) נתון: $S_{\triangle EBC} = 4.2$ סמ"ר

$AC = 8$ ס"מ

$CE = 4$ ס"מ

$BK \perp AE$ (א)

משולשים ABC, BCE הם בעלי אותו גובה BK,

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BCE}} = \frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{4.2} = \frac{8}{4} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 8.4 \text{ סמ"ר} \quad \text{אז:}$$

מ.ש.ל. (א)

(ב) נתון $\triangle ABC \sim \triangle ADE$



$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE} = \frac{8}{8+4} = \frac{2}{3}$$

מ.ש.ל. (ב)

(ג) (i) מדמיון משולשים EBC ו-EFA:

$$\frac{BC}{FA} = \frac{EC}{EA} \Rightarrow \frac{3.6}{FA} = \frac{4}{4+8} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3.6}{FA} = \frac{1}{3} \Rightarrow FA = 10.8 \text{ ס"מ}$$

(ii) נתון: $\triangle EBC \sim \triangle ADE$, $BC = 3.6$ ס"מ

נסמן את יחס הדמיון שמצאנו בסעיף (ב) ב- k_1 ($k_1 = \frac{2}{3}$).

נסמן את יחס הדמיון בין $\triangle EBC$ ל- $\triangle EFA$ ב- k_2 .

המשך בעמוד הבא <<<

$$k_2 = \frac{EC}{EA} = \frac{4}{4+8} = \frac{1}{3}$$

מכאן:

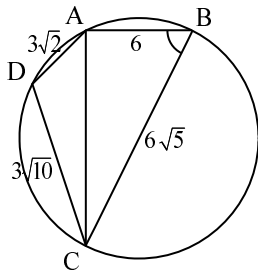
$$\frac{S_{\Delta BCE}}{S_{\Delta BAC}} = k_2^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{4.2}{S_{\Delta BAC}} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{\Delta EAF} = 37.8 \text{ סמ"ר}$$

$$S_{\Delta BAF} = S_{\Delta AEF} - S_{\Delta BCE} - S_{\Delta BAC} = 37.8 - 4.2 - 8.4 = 25.2 \text{ סמ"ר}$$

$$\frac{S_{\Delta DAE}}{S_{\Delta BAC}} = k_1^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{S_{\Delta DAE}}{8.4} = \frac{9}{4}$$

$$S_{\Delta DAE} = 18.9 \text{ סמ"ר}$$

$$S_{\Delta BDE} = S_{\Delta ADE} - S_{\Delta ABC} - S_{\Delta BCE} = 18.9 - 8.4 - 4.2 = 6.36 \text{ סמ"ר}$$

(6) (א) נתון: $AB = 6$ ס"מ, $BC = 6\sqrt{5}$ ס"מ. $AD = 3\sqrt{2}$ ס"מ, $CD = 3\sqrt{10}$ ס"מ. נעביר קטע AC .. נסמן: $\angle ABC = \alpha$.

סכום זוויות נגדיות במרובע החסום במעגל

. הוא 180° ולכן: $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$.לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔABC :

$$AC^2 = 36 + (6\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6\sqrt{5} \cdot \cos \alpha$$

$$AC^2 = 216 - 72\sqrt{5} \cdot \cos \alpha \quad (*)$$

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔADC :

$$AC^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{10})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{10} \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$AC^2 = 18 + 90 - 36\sqrt{5} \cos(180^\circ - \alpha) = 108 + 36\sqrt{5} \cos \alpha$$

נשווה בין הביטויים ל- AC^2 ונקבל:

$$216 - 72\sqrt{5} \cos \alpha = 108 + 36\sqrt{5} \cos \alpha$$

$$108\sqrt{5} \cos \alpha = 108 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\alpha = \angle ABC = 63.435^\circ$$

◀◀◀ המשך בעמוד הבא

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \angle B}{2} + \frac{AD \cdot DC \cdot \sin \angle D}{2} = \quad (ב)$$

$$= \frac{6 \cdot 6\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}}{2} + \frac{3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{10} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}}{2} = 36 + 18 = 54 \text{ סמ"ר}$$

הערה: מצאנו כי $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, אז:

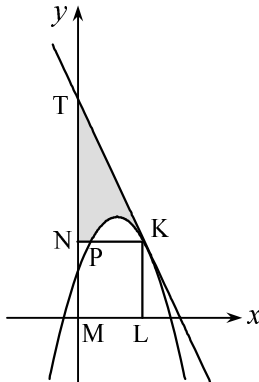
$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(ג) רדיוס המעגל החוסם את ABCD הוא כרדיוס המעגל החוסם את ΔABC .

$$AC^2 = 216 - 72\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 144 \quad \text{לפי (*)} :$$

$$AC = 12 \text{ ס"מ} \quad \text{כלומר:}$$

$$R = \frac{AC}{2 \sin \angle B} = \frac{12}{2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}} = 3\sqrt{5} \text{ ס"מ} \quad \text{ואז לפי משפט הסינוסים:}$$



(7) (א) נסמן: $x_K = t$, אז: $y_K = -3t^2 + 4t + 1$

$$y_N = y_K = -3t^2 + 4t + 1$$

$$x_L = x_K = t$$

פונקציית המטרה (שטח המלבן):

$$S = KN \cdot KL = (x_K - x_N) \cdot (y_K - y_L)$$

$$S = (-3t^2 + 4t + 1 - 0) \cdot (t - 0) = -3t^3 + 4t^2 + t$$

$$S' = -9t^2 + 8t + 1$$

$$S' = 0 \Rightarrow -9t^2 + 8t + 1 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-8 \pm 10}{-18}$$

$$t_1 = -\frac{1}{9}, t_2 = 1, t > 0 \Rightarrow K(1, 2)$$

$$S'' = -18t + 8 \Rightarrow S''(1) = -18 + 8 < 0 \Rightarrow \max$$

$$y' = -6x + 4 \Rightarrow m_{\text{משיק}} = y'(1) = -6 + 4 = -2 \quad (ב)$$

$$y - y_K = m(x - x_K) \quad \text{משוואת משיק בנקודה K:}$$

$$y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 4$$

המשך בעמוד הבא <<<

מציאת שיעורי הנקודה P (נקודת חיתוך הפרבולה והישר NK):

$$y_P = 2$$

$$2 = -3x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{6}$$

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{3}$$

הפתרון $x_1 = 1$ מתאים לנקודה K, לכן: $P(\frac{1}{3}, 2)$.

נמצא את שיעור ה-y של הנקודה T:

$$x_T = 0 \Rightarrow y_T = -2 \cdot 0 + 4 = 4 \Rightarrow T(0, 4)$$

נסמן: S^* – השטח בין הפרבולה לקטע PK. מכאן:

$$S_{\text{מבוקש}} = S_{\Delta TNK} - S^*$$

$$S_{\Delta TNK} = \frac{NT \cdot NK}{2} = \frac{(y_T - y_N)(x_K - x_N)}{2} = \frac{(4 - 2)(1 - 0)}{2} = 1 \text{ יחידת שטח}$$

$$S^* = \int_{\frac{1}{3}}^1 (-3x^2 + 4x + 1 - 2) dx = (-x^3 + 2x^2 - x) \Big|_{\frac{1}{3}}^1 =$$

$$= (-1 + 2 - 1) - \left(-\frac{1}{27} + \frac{2}{9} - \frac{1}{3}\right) = -\left(-\frac{4}{27}\right) = \frac{4}{27} \text{ יחידת שטח}$$

$$S_{\text{מבוקש}} = 1 - \frac{4}{27} = \frac{23}{27} \text{ יחידת שטח}$$

$$f'(x) = a \cdot \frac{2x(x^2 - bx + b^2) - x^2(2x - b)}{()^2} = \quad (8) \quad (א)$$

$$= \frac{a}{()^2} \cdot (2x^3 - 2bx^2 + 2b^2x - 2x^3 + bx^2) =$$

$$= \frac{a}{()^2} \cdot (-bx^2 + 2b^2x) = \frac{ab}{()^2} \cdot x(2b - x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2b$$

ניעזר בגרף של $f'(x)$, ובכך ש- $f(x)$ עולה בתחום שבו $f'(x) > 0$

ויורדת בתחום שבו $f'(x) < 0$, ונקבע: $x_{\min} = 0, x_{\max} = 2b$.

(ב) ניעזר בגרף של $f'(x)$:

תחום עלייה: $0 < x < 2b$, תחומי ירידה: $x < 0, x > 2b$.

$$f'(6) = 0 \Rightarrow \frac{ab}{()^2} \cdot 6(2b - 6) = 0 \Rightarrow 2b - 6 = 0 \Rightarrow b = 3 \quad (ג)$$

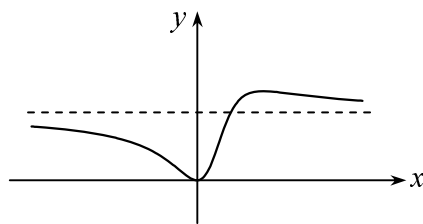
המשך בעמוד הבא <<<

$$f'(3) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a \cdot 3}{(9 - 9 + 9)^2} \cdot 3 \cdot (6 - 3) = \frac{2}{3} \quad (\text{ד})$$

$$\frac{a}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 3x + 9}$$

משוואת אסימפטוטה אופקית: $y = 2$ (החזקות של המונה והמכנה שוות,



$$\therefore y = \frac{\text{מקדם ראשי}}{\text{מקדם ראשי}} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{לכן}$$

(ה) ראו סרטוט משמאל.

$$y' = \frac{\frac{k(x-1)}{2\sqrt{x-2}} - k\sqrt{x-2}}{k^2(x-1)^2} = \frac{k(x-1) - 2k(x-2)}{2k^2(x-1)^2\sqrt{x-2}} \quad (\text{א}) \quad (9)$$

$$y' = 0 \Rightarrow k(x-1) - 2k(x-2) = 0 \quad /: k \neq 0$$

$$x-1-2x+4=0 \Rightarrow -x+3=0 \Rightarrow x=3$$

$$x=3 \Rightarrow y = \frac{1}{2k} + 1 \Rightarrow \left(3, \frac{2k+1}{2k}\right)$$

(ב) שיעור הנקודה שמצאנו בסעיף (א) מקיימים את המשוואה $y = \frac{1}{2}x$,

$$\frac{2k+1}{2k} = \frac{1}{2} \cdot 3 \Rightarrow 2k+1=3k \Rightarrow k=1 \quad \text{לכן}$$

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2 \quad (i) \quad (g) \quad \text{תחום הגדרה:}$$

(iii) + (ii)

$$y' = \frac{x-1-2x+4}{2(x-1)\sqrt{x-2}} = \frac{3-x}{2(x-1)\sqrt{x-2}}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3-x=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

המשך בעמוד הבא <<<

המכנה של פונקציית הנגזרת חיובי לכל x מתחום ההגדרה, לכן:
 אם $x > 3$ אזי $y' < 0$ והפונקציה יורדת.
 אם $2 \leq x < 3$ אזי $y' > 0$ והפונקציה עולה.

x	$x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
y'	+	0	-
y	↗	max	↘

בסך הכול נקבל: מקסימום $(3, \frac{3}{2})$, מינימום קצה $(2, 1)$.

גבי יקואל

מ ש ב צ ת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות