

פתרון מבחן מס' 10 (ספר לימוד – שאלון 035804)

09-05-2017

(1) (א) נסמן ב- x את המהירות בה רכב יניב על אופניו (בקמ"ש).

מהירות (בקמ"ש)	זמן (בשעות)	דרך (בק"מ)	
$x - 16$	$\frac{8}{x - 16}$	8	ברגל
x	$\frac{40}{x}$	40	באופניים

מהשוואת זמנים נקבל את המשוואה:

$$\frac{8}{x - 16} + \frac{40}{x} = 4 \quad / \cdot x(x - 16)$$

$$8x + 40(x - 16) = 4x(x - 16)$$

$$8x + 40x - 640 = 4x^2 - 64x$$

$$4x^2 - 112x + 640 = 0 \Rightarrow x^2 - 28x + 160 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 640}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{28 \pm 12}{2}$$

$$x_1 = 20, \quad x_2 = 8$$

$x_2 = 8$ נפסל כי אז המהירות ברגל שלילית ($8 - 16 < 0$).

תשובה: המהירות בה רכב יניב על אופניו היא 20 קמ"ש.

(ב) נסמן ב- t (שעות) את הזמן שעבר מרגע יציאת אחיו של יניב מנקודה A

ועד הרגע בו נפגשו האחים.

מהירות (בקמ"ש)	זמן (בשעות)	דרך (בק"מ)	
20	$t + \frac{45}{60} = t + \frac{3}{4}$	$20\left(t + \frac{3}{4}\right)$	יניב
$\frac{100 + 20}{100} \cdot 20 = 24$	t	$24t$	אחיו של יניב

מסכום הדרכים שעברו האחים, נקבל את המשוואה:

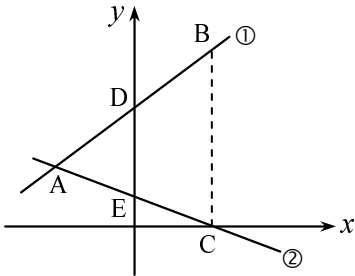
$$20\left(t + \frac{3}{4}\right) + 24t = 48$$

$$20t + 15 + 24t = 48 \Rightarrow 44t = 33 \Rightarrow t = 0.75$$

המרחק מהנקודה A שבו נפגשו האחים הוא:

$$24t = 24 \cdot 0.75 = 18$$

תשובה: האחים נפגשו 18 ק"מ מנקודה A.



(2) (א) שיפוע הישר $y = \frac{3}{4}x + 6$ הוא $\frac{3}{4}$,

לכן המשוואה מתאימה לישר העולה

בסרטוט, כלומר, לישר ①.

(ב) (i) נתון $BC = 9$.

$$y_B = 9 \Rightarrow 9 = \frac{3}{4}x + 6$$

$$\frac{3}{4}x = 3 \Rightarrow x_B = 4$$

$$B(4,9)$$

$$x_C = x_B = 4 \Rightarrow C(4,0) \quad (ii)$$

(ג) שיעורי נקודה D :

$$x_D = 0 \Rightarrow y_D = \frac{3}{4} \cdot 0 + 6 = 6 \Rightarrow D(0,6)$$

שיעורי נקודה B : $B(4,9)$

הנקודה D היא אמצע הקטע AB, אז לפי נוסחאות שיעורי אמצע קטע :

$$\begin{cases} x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x_A + 4}{2} \Rightarrow x_A = -4 \\ y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = 6 \Rightarrow 6 = \frac{y_A + 9}{2} \Rightarrow y_A = 3 \end{cases} \Rightarrow A(-4,3)$$

$$\begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= \frac{BC \cdot h_{BC}}{2} = \frac{(y_B - y_C) \cdot (x_B - x_A)}{2} = \\ &= \frac{(9 - 0) \cdot (4 + 4)}{2} = 36 \text{ יחידות שטח} \end{aligned}$$

(ד) נמצא את משוואת הישר AC שאינה נתונה.

$$A(-4,3), C(4,0) \Rightarrow m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{0 - 3}{4 + 4} = -\frac{3}{8}$$

$$y - y_C = m_{AC}(x - x_C) \Rightarrow y - 0 = -\frac{3}{8}(x - 4)$$

$$y = -\frac{3}{8}x + \frac{3}{2}$$

(ה) ΔABC הוא קטע אמצעים ב- ΔABC , מכאן $DE \parallel BC$, $AD = DB$

$$DE = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$$

היחס בין שטחי משולשים דומים הוא ריבוע יחס הדמיון ביניהם.

המשך בעמוד הבא <<<

$$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_{DBCE}}{S_{\Delta ADE}} = \frac{S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ADE}} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}} - 1 = 4 - 1 = 3$$

שטח הטרפז DBCE גדול משטח המשולש ADE פי 3.

(3) (א) נסמן: A – המאורע לבחור באקראי תושב צעיר.

B – המאורע לבחור באקראי תושב התומך בבניית

גורד השחקים.

$$P(\bar{B}) = 0.7, P(A/B) = 0.4$$

לפי נתוני השאלה:

$$P(B \cap \bar{A}) = 3 \cdot P(\bar{B} \cap A)$$

נבנה טבלה מתאימה:

	\bar{A}	A	
0.3	0.18	0.12	B
0.7	0.64	0.06	\bar{B}
1	0.82	0.18	

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.7 = 0.3$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.4$$

$$P(A \cap B) = 0.4 \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.3$$

$$P(A \cap B) = 0.12$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.12 = 0.18$$

$$P(\bar{A} \cap B) = 3 \cdot P(\bar{B} \cap A)$$

לפי הנתון:

$$0.18 = 3 \cdot P(A \cap \bar{B})$$

נציב ונקבל:

$$P(A \cap \bar{B}) = 0.06$$

לכן:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = 0.12 + 0.06 = 0.18$$

כלומר, ההסתברות לבחור באקראי תושב צעיר היא 0.18.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.12}{0.18} = \frac{2}{3}$$

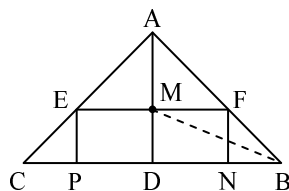
(ב)

המשך בעמוד הבא <<<

$$\begin{aligned}
 P(\text{תושב מבוגר או תושב המתנגד לבנייה}) &= P(\bar{A} \cup \bar{B}) = & (ג) \\
 &= P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) \\
 P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = 0.7 - 0.06 = 0.64 \\
 P(\bar{A}) &= 1 - P(A) = 1 - 0.18 = 0.82 \\
 P(\text{תושב מבוגר או תושב המתנגד לבנייה}) &= 0.82 + 0.7 - 0.64 = 0.88
 \end{aligned}$$

הערה: דרך אחרת לחישוב ההסתברות המבוקשת בסעיף (ג):

$$\begin{aligned}
 P(\text{תושב מבוגר או תושב המתנגד לבנייה}) &= 1 - P(A \cap B) \\
 P(\text{תושב מבוגר או תושב המתנגד לבנייה}) &= 1 - 0.12 = 0.88
 \end{aligned}$$



(4) 15 ס"מ $AB = AC$, 18 ס"מ BC ,

$EP \perp BC$, $FN \perp BC$, $EF \parallel CB$

(א) מרכז המעגל החסום במשולש נמצא

בנקודת חיתוך חוצי-זוויות המשולש,

לכן, BM חוצה-זווית B , ו- AD חוצה זווית A ב- $\triangle ABC$.

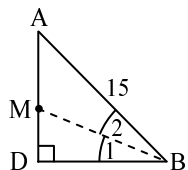
(ב) במשולש שווה-שוקיים חוצה זווית הראש הוא גם גובה ותיכון לבסיס,

$$CD = DB , AD \perp BC$$

$$CD = BD = \frac{BC}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ ס"מ} \quad \text{לכן:}$$

$$AD^2 = AC^2 - CD^2 \quad \text{לפי משפט פיתגורס ב- } \triangle ACD :$$

$$AD^2 = 225 - 81 = 144 \Rightarrow AD = 12 \text{ ס"מ}$$



(ג) נתבונן ב- $\triangle ADB$. $\angle D = 90^\circ$, $DB = 9$ ס"מ .

15 ס"מ $AB =$, 12 ס"מ $AD =$ (מצאנו בסעיף (ב)).

נסמן: $AM = x$, ואז $MD = 12 - x$.

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AB}{DB} \Rightarrow \frac{x}{12-x} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \quad \text{לפי משפט חוצה-זווית:}$$

(חוצה-זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לקטעים, שהיחס

ביניהם, שווה ליחס בין הצלעות המתאימות הכולאות את הזווית).

◀◀ המשך בעמוד הבא

$$\frac{x}{12-x} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3x = 60 - 5x \Rightarrow 8x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{8} = 7.5 \text{ ס"מ}$$

$$MD = 12 - 7.5 = 4.5 \text{ ס"מ}, AM = 7.5 \text{ ס"מ}$$

$$S_{EFNP} = EF \cdot FN, FN = MD = 4.5 \text{ ס"מ} \quad (ד)$$

נמצא את אורך EF :

$$\frac{EF}{CB} = \frac{AF}{AB} \quad \text{לפי משפט תאלס המורחב (EF || CB):}$$

במשולשים דומים, היחס בין הגבהים שווה ליחס בין הצלעות המתאימות.

$$\frac{EF}{CB} = \frac{AM}{AD} \quad \text{לכן: } \frac{AF}{AB} = \frac{AM}{AD} \quad \text{מכאן נקבל:}$$

$$\frac{EF}{18} = \frac{7.5}{12} \Rightarrow EF = \frac{18 \cdot 7.5}{12} = 11.25 \text{ ס"מ} \quad \text{נציב את הידוע ונקבל:}$$

$$S_{EFNP} = 11.25 \cdot 4.5 = 50.625 \text{ סמ"ר} \quad \text{מכאן:}$$

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC = \alpha \quad \text{(א) נסמן: (5)}$$

$$\sphericalangle BED = 2\alpha \quad \text{אז:}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta EBD \quad \text{לפי משפט דמיון ז.ז.}$$

⇓

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{ED}$$

⇓

$$ED \cdot BC = BD \cdot AC \quad \text{מ.ש.ל. (א)}$$

(ב) לפי משפט חוצה-זווית:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

⇓

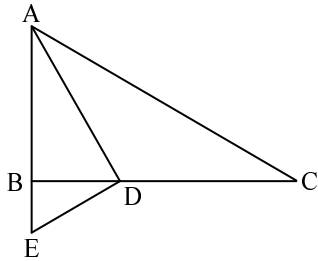
$$AC \cdot BD = AB \cdot DC$$

$$AC \cdot BD = ED \cdot BC \quad \text{לפי סעיף (א)}$$

⇓

$$ED \cdot BC = AB \cdot DC \quad \text{מ.ש.ל. (ב)}$$

המשך בעמוד הבא <<<



$$\tan 2\alpha = \frac{BD}{BE} \quad : \Delta BDE \text{ -ב- } (\text{ג})$$

$$\tan \alpha = \frac{BD}{AB} \quad : \Delta ABD \text{ -ב-}$$

$$\begin{cases} \tan 2\alpha = \frac{BD}{BE} \\ \tan \alpha = \frac{BD}{AB} \end{cases} / : \tan \alpha$$

$$\begin{cases} \frac{\tan 2\alpha}{\tan \alpha} = \frac{BD}{BE} \cdot \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BE} = 3 \\ \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = 3 \tan \alpha$$

$$\tan \alpha \left(\frac{2}{1 - \tan^2 \alpha} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = 0 \\ \frac{2}{1 - \tan^2 \alpha} = 0 \end{cases}$$

$$\tan \alpha = 0 \quad \text{או} \quad 2 - 3 + 3 \tan^2 \alpha = 0$$

$$\alpha = 360^\circ n \quad 3 \tan^2 \alpha = 1$$

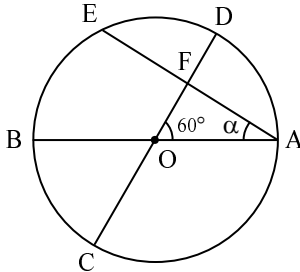
$$\text{לא מתאים.} \quad \tan^2 \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\tan \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = \pm 30^\circ + 180^\circ k$$

$$\alpha = 30^\circ \text{ לפי משמעות השאלה}$$

$$\sphericalangle BAD = 30^\circ$$



$$\angle FAO = \alpha, \angle FOA = 60^\circ \quad (6)$$

$$\angle OFA = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha$$

(סכום זוויות ב- $\triangle OAF$ שווה ל- 180°).

$$\angle COA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

(סכום זוויות צמודות שווה ל- 180°).

$$S_{\triangle ACF} = S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OAF}, \quad OA = OC = R \quad (א)$$

$$S_{\triangle OAC} = \frac{OA \cdot OC}{2} \cdot \sin \angle AOC =$$

$$= \frac{R \cdot R}{2} \cdot \sin 120^\circ = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

לפי משפט הסינוסים $\triangle OFA$:

$$\frac{AO}{\sin(120^\circ - \alpha)} = \frac{OF}{\sin \alpha} \Rightarrow OF = \frac{AO \cdot \sin \alpha}{\sin(120^\circ - \alpha)}$$

$$S_{\triangle OAF} = \frac{OA \cdot OF \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{OA \cdot OA \cdot \sin \alpha \cdot \sin 60^\circ}{2 \sin(120^\circ - \alpha)}$$

$$= \frac{R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \alpha}{2 \sin(120^\circ - \alpha)} = \frac{R^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin \alpha}{4 \sin(120^\circ - \alpha)}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3} R^2 \sin \alpha}{4 \sin(120^\circ - \alpha)} = \frac{\sqrt{3} R^2}{4} \cdot \left[1 + \frac{\sin \alpha}{\sin(120^\circ - \alpha)} \right]$$

(ב) נתון: $\alpha = 30^\circ$, לכן,

$$S_{\triangle ACF} = \frac{\sqrt{3} R^2}{4} \left(1 + \frac{\sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} \right) = \frac{\sqrt{3} R^2}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} R^2}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{8} \sqrt{3} \cdot R^2$$

מ.ש.ל.

(7) (א) לפי הנתון בסעיף זה נסיק כי $1 + \frac{A}{1} = 9$, כלומר $A = 8$.

$$f(x) = 1 + \frac{8x^2}{x^2 - 9} \quad (\text{ב})$$

$$x^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 3 \quad (i)$$

$$x = 0 \Rightarrow (0,1) \quad (ii)$$

$$0 = 1 + \frac{8x^2}{x^2 - 9} \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (1,0), (-1,0)$$

(iii) $x = 3$ ו- $x = -3$ הן האסימפטוטות האנכיות,

כי $x = 3$ וגם $x = -3$ מאפס מונה של הפונקציה

ואינו מאפס את המכנה.

(iv) נגזור, נשווה לאפס וניעזר בטבלה לקביעת תחומי עלייה / ירידה,

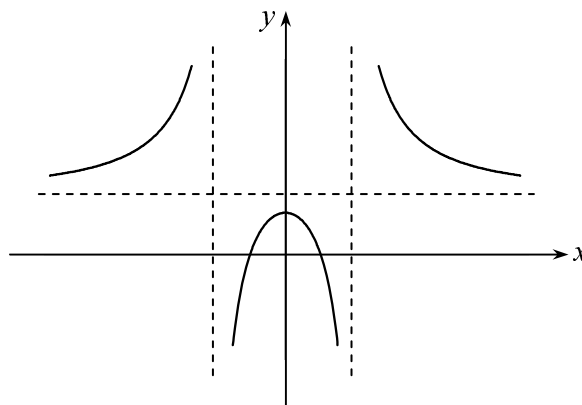
וכך נמצא ש- $\max(0,1)$.

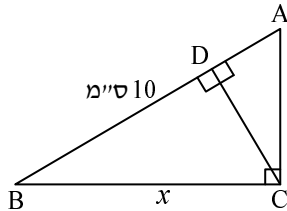
(ג) נעלה על מערכת צירים את נקודת המקסימום $(0,1)$,

נקודות החיתוך עם הצירים $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$,

נקווקו את האסימפטוטות $x = 3$, $x = -3$, $y = 9$

ונסרטט את הסקיצה:





(8) (א) (i) על-פי משפט פיתגורס נמצא כי:

$$AC = \sqrt{100 - x^2} \text{ ס"מ}$$

(ii) למציאת DC כדאי להיעזר בהשוואת

שטח המשולש ABC בשתי דרכים:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot DC}{2} = \frac{BC \cdot AC}{2} \Rightarrow AB \cdot DC = BC \cdot AC \Rightarrow$$

$$10 \cdot DC = x \cdot \sqrt{100 - x^2} \Rightarrow$$

$$DC = \frac{x \sqrt{100 - x^2}}{10} = \frac{1}{10} x \sqrt{100 - x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{10} x \sqrt{100 - x^2} \quad (\text{ב})$$

(תחום הגדרה: $100 - x^2 > 0$ וגם $x > 0$, כלומר $0 < x < 10$.)

$$f'(x) = \frac{1}{10} \sqrt{100 - x^2} + \frac{1}{10} x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = 0 \quad / \cdot 10\sqrt{100 - x^2}$$

$$100 - x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

(הפתרון $x = -\sqrt{50}$ נפסל כי x צריך להיות חיובי.)

$$f''(x) = \frac{100 - 2x^2}{10\sqrt{100 - x^2}}$$

$$T(x) = 100 - 2x^2 \text{ נסמן}$$

בנקודת הקיצון, הסימן של $f''(x)$ הוא כמו הסימן של $T'(x)$,

כי המכנה של הנגזרת $10\sqrt{100 - x^2}$ הוא ביטוי שתמיד חיובי.

$$T'(x) = -4x \text{ כלומר:}$$

$$T'(\sqrt{50}) < 0 \Rightarrow \max$$

תשובה: עבור $x = \sqrt{50}$ הגובה ליתר מקסימלי.

(9) (א) שיפוע הישר $4y = 10x + 15$ הוא $\frac{10}{4} = 2.5$,

ולכן נתון כי בנקודת ההשקה מתקיים: $f'(x) = 2.5$.

$$f'(x) = -\frac{5}{(2x-1)^4} \cdot [(2x-1)^2]'$$

$$f'(x) = -\frac{5}{(2x-1)^4} \cdot 2(2x-1)^1 \cdot 2 = -\frac{20}{(2x-1)^3}$$

$$2.5 = -\frac{20}{(2x-1)^3} \Rightarrow (2x-1)^3 = -8 \Rightarrow 2x-1 = -2$$

כלומר $x = -0.5$ ואז $f(-0.5) = 1.25$, כלומר שיעורי נקודת ההשקה:

$(-0.5, 1.25)$. כעת נמצא את משוואת המשיק:

$$y - 1.25 = 2.5(x + 0.5) \Rightarrow y = 2.5x + 2.5$$

$$S_1 = \int_{-0.5}^0 \left[\frac{5}{(2x-1)^2} - (2.5x + 2.5) \right] dx \quad (ב)$$

לאחר חישוב האינטגרל המסוים,

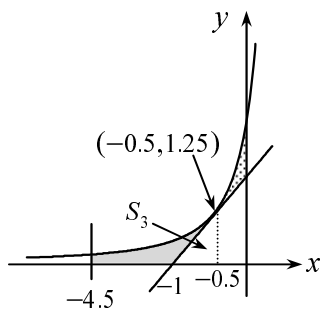
נקבל: $S_1 = \frac{5}{16}$ יחידות שטח.

(ג) נמצא את שיעור ה- x של נקודת החיתוך

של המשיק עם ציר ה- x :

$$0 = 2.5x + 2.5 \Rightarrow x = -1$$

נוריד אנך מנקודת ההשקה לציר ה- x .



נסמן ב- S_3 את השטח של המשולש שנוצר בין האנך, ציר ה- x והמשיק.

$$S_2 = \int_{-4.5}^{-0.5} f(x) dx - S_3 \quad \text{את השטח האפור שבסרטוט נחשב כך:}$$

$$S_3 = \frac{0.5 \cdot 1.25}{2} = \frac{5}{16} \text{ יחידות שטח}$$

$$\int_{-4.5}^{-0.5} \frac{5}{(2x-1)^2} dx = \int_{-4.5}^{-0.5} [5(2x-1)^{-2}] dx = \left[\frac{5(2x-1)^{-1}}{-1 \cdot 2} \right]_{-4.5}^{-0.5} =$$

$$= \left[\frac{5}{-2(2x-1)} \right]_{-4.5}^{-0.5} = \frac{5}{-2(-1-1)} - \frac{5}{-2(-9-1)} =$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{5}{20} = 1$$

כלומר, $S_2 = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$ יחידות שטח.

גבי יקואל

מ ש ב צ ת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות