פתרון מבחן מס' 9 (ספר לימוד – שאלון 035804)

09-05-2017

(1) (א) נסמן ב- x $\left(\frac{\text{מטר}}{\text{דקה}}\right)$ את המהירות בה צעד האדם ביום רגיל.

		מהירות $\left(\frac{\text{מטר}}{\text{דקה}}\right)$	זמן (דקות)	דרך (מטר)
ביום רגיל		x	$\frac{1,640}{x}$	$1,640$
ביום שבו התעכב במשך 4 דקות	לפני ההתעכבות	x	$\frac{1,080}{x}$	$1,080$
	התעכבות	0	4	0
	אחרי ההתעכבות	$1.4x$	$\frac{560}{1.4x}=\frac{400}{x}$	$1,640-1,080=560$

מהשוואת זמנים נקבל את המשוואה:

$$\frac{1,640}{x}=\frac{1,080}{x}+4+\frac{400}{x} \quad \Rightarrow \quad 1,640=1,080+4x+400$$

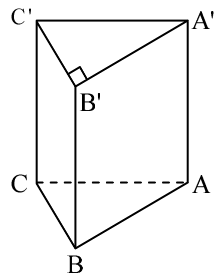
$$4x=160 \quad \Rightarrow \quad x=40$$

תשובה: ביום רגיל האדם צועד במהירות של 40 מטר לדקה.

(ב) האדם עבר מרחק של $1,080$ מטר עד שהתעכב, כלומר הזמן שלקח לו מרגע שיצא ועד למקום שבו התעכב:

$$\text{זמן}=\frac{\text{דרך}}{\text{מהירות}}=\frac{1,080}{40}=27 \text{ דקות}$$

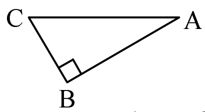
תשובה: האדם הגיע בשעה 13:27 למקום בו התעכב.



(2) (א) $V = S_{\text{בסיס}} \cdot h = S_{\text{בסיס}} \cdot 6 = 180$ סמ"ק

$S_{\text{בסיס}} = S_{\Delta ABC} = 30$ סמ"ר

(ב) נתבונן ב- ΔABC :



$$S_{\Delta ABC} = \frac{\text{ניצב1} \cdot \text{ניצב2}}{2} \quad \Rightarrow \quad 30 = \frac{5 \cdot \text{ניצב2}}{2}$$

ניצב2 $= 12$ ס"מ

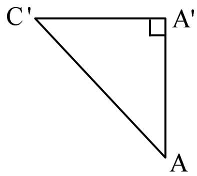
$BA = 12$ ס"מ , $CB = 15$ ס"מ

לפי משפט פיתגורס : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \quad \Rightarrow \quad AC = 13$ ס"מ

היקף המשולש : $AB + BC + AC = 12 + 5 + 13 = 30$ ס"מ

(ג) נתבונן ב- $\Delta AA'C'$:



$AA' = h = 6$ ס"מ , $A'C' = AC = 13$ ס"מ

לפי משפט פיתגורס :

$$(AC')^2 = (AA')^2 + (A'C')^2$$

$$(AC')^2 = 36 + 169 = 205$$

$AC' = \sqrt{205}$ ס"מ

(3) בהטלה אחת : $P(\text{לבן}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(\text{צהוב}) = \frac{1}{6}$, $P(\text{כחול}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(א) לפי נוסחת ברנולי :

$$P_4(3) = \binom{4}{3} \cdot \left(P(\text{כחול})\right)^3 \cdot \left(1 - P(\text{כחול})\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81}$$

(ב) ההסתברות שתתקבל פאה הצבועה בכחול **לפחות** 3 פעמים מתוך 4 :

$$P(\text{לפחות 3 פעמים כחול}) = P(\text{3 פעמים כחול}) + P(\text{4 פעמים כחול})$$

$$P(\text{לפחות 3 פעמים כחול}) = \frac{8}{81} + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

$$P(\text{בדיוק 3 פעמים / לפחות 3 פעמים}) = \frac{P(\text{בדיוק 3 פעמים})}{P(\text{לפחות 3 פעמים})} = \frac{\frac{8}{81}}{\frac{1}{9}} = \frac{8}{9}$$

המשך בעמוד הבא ⋘

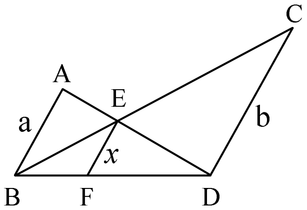
(ג) $P(\text{3 פעמים כחול ופעם אחת לבן}) = 4\cdot\left(P(\text{כחול})\right)^3\cdot P(\text{לבן})$

$$= 4\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^3\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{4}{2\cdot 27} = \frac{2}{27}$$

כחול +
לבן −

$+\ +\ +\ -$
$+\ +\ -\ +$
$+\ -\ +\ +$
$-\ +\ +\ +$

(4) נתון: $DC \parallel EF$, $EF \parallel AB$.



צ"ל: $\frac{EF}{AB}+\frac{EF}{CD}=1$

נסמן: $EF=x$, $AB=a$, $DC=b$

כלומר, צ"ל: $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$

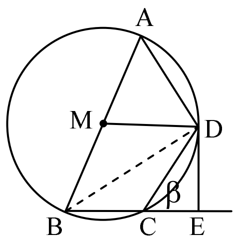
לפי משפט תאלס המורחב:

ב- ΔBCD : $\frac{x}{b}=\frac{BF}{BD}$, ב- ΔDAB : $\frac{x}{a}=\frac{DF}{DB}$.

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{DF}{DB}+\frac{BF}{BD}=\frac{DF+BF}{BD}=\frac{BD}{BD}=1$$

לכן: $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{EF}{AB}+\frac{EF}{CD}=1$. מ.ש.ל.

(5) (א)



$\measuredangle BCD = 180^\circ - \beta$ — זוויות צמודות, סכומן 180° .

$\measuredangle A = 180^\circ - \measuredangle BCD = \beta$ — במרובע חסום במעגל סכום הזוויות הנגדיות הוא 180° .

$MA = MD$ — רדיוסים שווים במעגל.

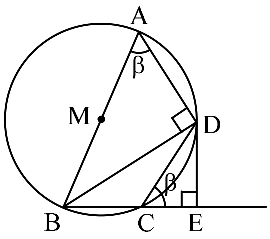
$\Downarrow$

$\measuredangle MDA = \measuredangle MAD = \beta$ — ב- ΔAMD מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות.

$\measuredangle BMD = \measuredangle MDA + \measuredangle MAD = 2\beta$ — זווית חיצונית למשולש שווה לסכום הזוויות שאינן צמודות לה.

מ.ש.ל. (א).

המשך בעמוד הבא ◄◄◄



(ב) נתבונן ב- ΔDCE , ΔABD :

$\measuredangle DCE = \beta$ נתון.

$\measuredangle BAD = \beta$ הוכחנו בסעיף (א).

$\Downarrow$

$\measuredangle BAD = \measuredangle DCE$

$\measuredangle ADB = 90^\circ$ זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל- 90° .

$\Downarrow$

$\measuredangle ADB = \measuredangle DEC = 90^\circ$

$\Downarrow$

$\Delta ADB \sim \Delta CED$ לפי משפט דמיון ז.ז.

$\Downarrow$

(ג) $\frac{AD}{CE} = \frac{AB}{DC}$ פרופורציה בין צלעות מתאימות במשולשים דומים.

נתבונן ב- ΔBCD :

לפי משפט הסינוסים :

$$\frac{DC}{\sin \measuredangle B} = 2R$$

$$\frac{DC}{\sin 20^\circ} = AB \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{DC} = \frac{1}{\sin 20^\circ} = 2.924$$

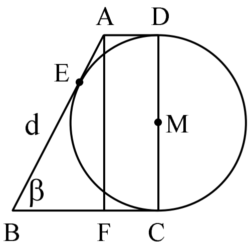
מכאן :

$$\frac{AD}{CE} = 2.924$$

(ד) שטחים של משולשים דומים מתייחסים כריבוע יחס בין צלעות מתאימות.

$$\frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta CED}} = \left(\frac{AD}{CE}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 20^\circ}$$

$S_{\Delta ADB} = 3.1 \cdot \frac{1}{\sin^2 20^\circ} \approx$ 26.5 סמ"ר



(6) (א) ניעזר בסימונים שבסרטוט.

$AD = AE$ ו- $BC = BE$

כי שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה, שווים זה לזה.

כלומר: $AE + BE = d = AD + BC$.

כלומר סכום בסיסיו של הטרפז הוא d .

(ב) היקף הטרפז: $\underbrace{AB}_{d} + \underbrace{AD + BC}_{d} + CD$.

למציאת אורך הקוטר CD , נוריד אנך מ- A ל- BC החותך אותו בנקודה F . $ADCF$ הוא מלבן (מרובע בעל 4 זוויות ישרות).

$$\Delta ABF : \sin\beta = \frac{AF}{d} \quad \Rightarrow \quad AF = DC = d\sin\beta$$

לכן היקף הטרפז הוא $2d + d\sin\beta$.

$$S_{\text{טרפז}} = \frac{(AD+BC)\cdot DC}{2} = \frac{d\cdot d\sin\beta}{2} = \frac{1}{2}d^2\sin\beta$$

(ג) נתון:

$$\begin{cases} 2d + d\sin\beta = 25 \\ \frac{1}{2}d^2\sin\beta = 25 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל: $d = \frac{25}{2+\sin\beta}$

מהמשוואה השנייה נקבל: $d = \sqrt{\frac{50}{\sin\beta}}$

ואז:

$$\frac{25}{2+\sin\beta} = \sqrt{\frac{50}{\sin\beta}} \quad /(\ )^2$$

$$\frac{625}{4+4\sin\beta+\sin^2\beta} = \frac{50}{\sin\beta}$$

נסמן: $\sin\beta = t$, ונקבל את המשוואה הריבועית:

$$50t^2 - 425t + 200 = 0 \quad /:25$$

$$2t^2 - 17t + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 8\ ,\ t_2 = \frac{1}{2}$$

למשוואה: $\sin\beta = 8$ אין פתרון.

מהמשוואה: $\sin\beta = \frac{1}{2}$ נקבל: $\beta = 30°$ (עבור $0° < \beta < 90°$).

(7) $f(x)=\dfrac{x+2a}{x^2-9a^2}\ ,\ a>0$

(א) תחום הגדרה: $x\neq\pm 3a \quad\Rightarrow\quad x^2-9a^2\neq 0$.

אסימפטוטות מקבילות לצירים: $x=3a\ ,\ x=-3a$ ו- $y=0$

(המעלה הגבוהה במכנה (2) גדולה מהמעלה הגבוהה במכנה (1)).

שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{0+2a}{0-9a^2}=-\frac{2}{9a} \quad\Rightarrow\quad \left(0,-\frac{2}{9a}\right)$$

שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$y=0 \quad\Rightarrow\quad x+2a=0 \quad\Rightarrow\quad x=-2a \quad\Rightarrow\quad (-2a,0)$$

למציאת תחומי עלייה וירידה נבדוק אם יש נקודת קיצון:

$$f'(x)=\frac{1(x^2-9a^2)-(x+2a)\cdot 2x}{(x^2-9a^2)^2}=0$$

$$x^2-9a^2-2x^2-4ax=0$$

$$-x^2-4ax-9a^2=0 \quad /\cdot(-1)$$

$$x^2+4ax+9a^2=0$$

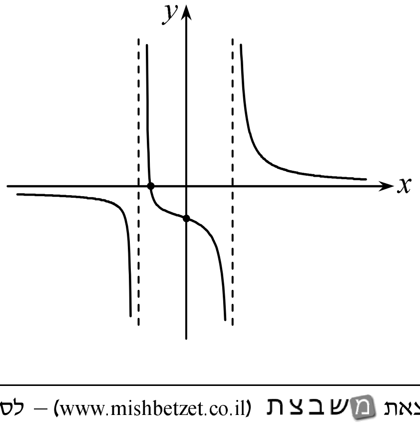
$$x_{1,2}=\frac{-4a\pm\sqrt{16a^2-36a^2}}{2}$$

$16a^2-36a^2<0$, לכן $f'(x)\neq 0$.

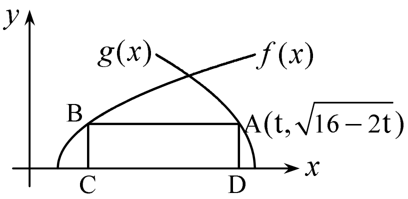
כלומר לפונקציה אין נקודות קיצון, ומכיוון ש-

$f'(x)=\dfrac{-x^2-4ax-9a^2}{+}=\dfrac{-}{+}=-$ לכל $x\neq\pm 3a$, הרי שהפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

(ב) כדי לסרטט סקיצה של גרף הפונקציה, נעלה את נקודות החיתוך עם הצירים, נקווקו את האסימפטוטות שמצאנו וניעזר בכך שהפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.



(8) (א) נזהה ש- $g(x)$ מתאים לפונקציה העוברת בנקודה A (כי תחום ההגדרה שלה הוא $x \le 8$) ו- $f(x)$ מתאים לפונקציה העוברת בנקודה B (כי תחום ההגדרה שלה הוא $x \ge 5$).



נביע את שיעורי הנקודה A באמצעות t : $y_A = \sqrt{16-2t}$.

$y_A = y_B$, כלומר שיעור ה- y של הנקודה B הוא $\sqrt{16-2t}$.

נבטא את שיעור ה- x של הנקודה B באמצעות t : $y_B = \sqrt{x_B - 5}$

$$\sqrt{16-2t} = \sqrt{x_B - 5}$$

$$16 - 2t = x_B - 5 \quad \Rightarrow \quad x_B = 21 - 2t$$

ואז : $B(21-2t, \sqrt{16-2t})$

(ב) $S_{\text{מלבן}} = AB \cdot AD = [t - (21-2t)] \cdot \sqrt{16-2t} = (3t-21)\sqrt{16-2t}$

(ג) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot S_{\text{מלבן}}$, מכאן נקבל :

$$S'(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[3\sqrt{16-2t} + (3t-21) \cdot \frac{-2}{2\sqrt{16-2t}}\right] = 0 \quad / \cdot 2\sqrt{16-2t}$$

$$3(16-2t) - (3t-21) = 0 \quad \Rightarrow \quad 48 - 6t - 3t + 21 = 0$$

$$9t = 69 \quad \Rightarrow \quad t = 7\tfrac{2}{3}$$

נשאר עדיין להראות שעבור $t = 7\frac{2}{3}$ שטח המשולש ABC הוא מקסימלי.

$$S'(t) = \frac{69 - 9t}{2\sqrt{16-2t}}$$

המכנה הוא חיובי, לכן לבדיקת סוג הקיצון אפשר לגזור רק את המונה :

$$(69 - 9t)' = -9 < 0 \quad \Rightarrow \quad \max$$

(9) (א) $y=\dfrac{x^3+2x^2-9x-18}{x+3}=\dfrac{x^2(x+2)-9(x+2)}{x+3}=\dfrac{(x+2)(x^2-9)}{x+3}=$

$=\dfrac{(x+2)(x+3)(x-3)}{x+3}=(x+2)(x-3)$ (עבור $x\neq-3$)

(ב) שיעורי נקודות החיתוך של הגרף עם ציר ה- x ⇐ $y=0$:

$(x+2)(x-3)=0 \;\Rightarrow\; x_1=-2\;,\; x_2=3 \;\Rightarrow\; (-2,0)\,,(3,0)$

שיעורי נקודת החיתוך הימנית : $(3,0)$

$y=x^2-x-6$

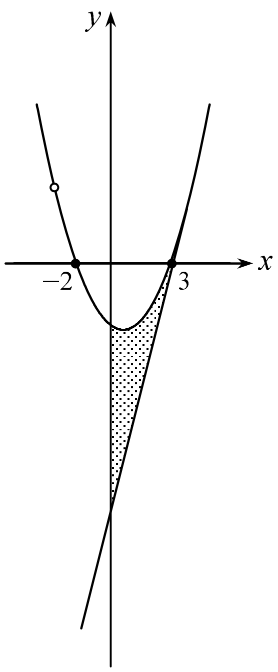
$y'=2x-1$

$y'(3)=5$

לכן משוואת המשיק : $y-0=5(x-3)$

$y=5x-15$

(ג) נסרטט את גרף הפונקציה והמשיק.



השטח המבוקש הוא בין גרף הפונקציה והמשיק בגבולות מ- 0 ועד 3 :

$$S=\int_0^3\left[x^2-x-6-(5x-15)\right]dx=\int_0^3\left(x^2-6x+9\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+9x\right)\Big|_0^3=9-27+27=9$$ יחידות שטח

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות