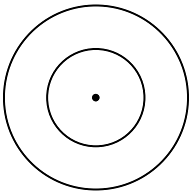
פתרון מבחן מס' 7 (ספר לימוד – שאלון 035804)

09-05-2017



(1) רדיוס המעגל הגדול: $\frac{D}{2}$, לכן שטח העיגול הגדול: $\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$.

רדיוס המעגל הקטן: $\frac{d}{2}$, לכן שטח העיגול הקטן: $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$.

שטח הטבעת המוגבלת בין שני המעגלים הללו

שווה להפרש שטחי העיגולים, לכן:

$$20\pi = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad / :\pi$$

$$20 = \frac{D^2}{4} - \frac{d^2}{4} \quad / \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad D^2 - d^2 = 80$$

היקף המעגל הגדול: $2\pi \cdot \frac{D}{2} = \pi D$.

היקף המעגל הקטן: $2\pi \cdot \frac{d}{2} = \pi d$.

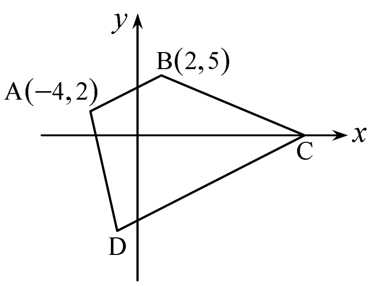
מכאן נקבל: $\pi D - \pi d = 4\pi \quad / :\pi \quad \Rightarrow \quad D - d = 4$

קיבלנו מערכת משוואות:

$$\begin{cases} D - d = 4 & \Rightarrow \quad D = d + 4 \\ D^2 - d^2 = 80 \end{cases}$$

נציב $d+4$ במקום D במשוואה השנייה ונקבל:

$(d+4)^2 - d^2 = 80 \quad \Rightarrow \quad d = 8$ ס"מ $\quad \Rightarrow \quad D = 12$ ס"מ



(2) נתון: $AB \parallel DC$, $BC = 13$ יחידות אורך

(א) $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

$$13 = \sqrt{(x_C - 2)^2 + (0-5)^2} \quad / \ (\ )^2$$

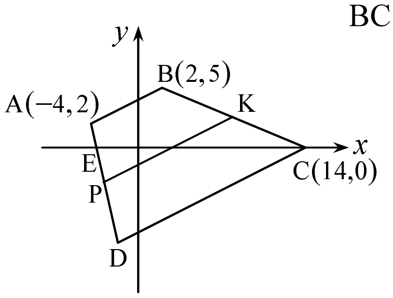
$$169 = (x_C - 2)^2 + 25$$

$$(x_C - 2)^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad x_C - 2 = \pm 12$$

נתון כי $x_C > 0$. לכן האפשרות: $x_C - 2 = -12 \quad \Rightarrow \quad x_C = -10$

לא תיתכן, ונקבל: $x_C - 2 = 12 \quad \Rightarrow \quad x_C = 14 \quad \Rightarrow \quad C(14,0)$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄



(ב) נסמן ב- K ו- P את נקודת אמצע הצלע BC ואת נקודת אמצע הצלע AD בהתאמה.

$$x_K = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+14}{2} = 8$$

$$y_K = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5+0}{2} = 2.5$$

כלומר: $K(8, 2.5)$

משוואת קטע האמצעים PK היא: $y - y_K = m_{PK}(x - x_K)$

$$m_{PK} = m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-2}{2+4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

לכן, משוואת PK: $y - 2.5 = \frac{1}{2}(x-8) \Rightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

שיעור ה- y של נקודה P הוא -3, אז: $-3 = \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow x_P = -3$

נקודה P היא אמצע קטע AD: $x_P = \frac{x_A + x_D}{2} \Rightarrow -3 = \frac{-4 + x_D}{2}$

לכן: $x_D = -2$

$$y_P = \frac{y_A + y_D}{2} \Rightarrow -3 = \frac{2 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = -8$$

כלומר: $D(-2, -8)$

(ג) משוואת AD: $m_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{-8-2}{-2+4} = \frac{-10}{2} = -5$

$$y - y_A = m_{AD}(x - x_A)$$

$$y - 2 = -5(x+4) \Rightarrow y = -5x - 18$$

נמצא את שיעורי נקודה E כאשר ידוע כי שיעור ה- y שלה הוא 0.

נציב במשוואת הישר AD, ונקבל: $0 = -5x - 18 \Rightarrow x_E = -3.6$

ב- ΔECD: $EC = x_C - x_E = 14 - (-3.6) =$ 17.6 יחידות אורך

והגובה לצלע EC: $h_{EC} = y_C - y_D =$ 8 יחידות אורך

שטח המשולש המבוקש:

$S_{\Delta ECD} = \frac{EC \cdot h_{EC}}{2} = \frac{17.6 \cdot 8}{2} =$ 70.4 יחידות שטח

(3) (א) נתון: $P(A)=0.6$, $P(B/A)=0.3$, $P(B/\overline{A})=0.4$.

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$0.3=\frac{P(A\cap B)}{0.6} \Rightarrow P(B\cap A)=0.18$$

$$P(B/\overline{A})=\frac{P(B\cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$$

$$0.4=\frac{P(B\cap \overline{A})}{1-0.6} \Rightarrow P(B\cap \overline{A})=0.16$$

ואז: $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap \overline{A})=0.18+0.16=0.34$

(ב) $P(A/\overline{B})=\frac{P(A\cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})$$

$$0.6=0.18+P(A\cap \overline{B}) \Rightarrow P(A\cap \overline{B})=0.42$$

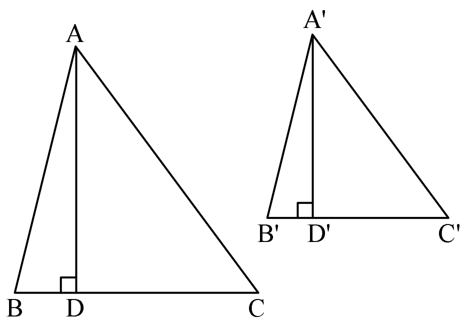
ואז: $P(A/\overline{B})=\frac{0.42}{1-0.34}=\frac{7}{11}$

הערה: למען הנוחות, אפשר להרכיב טבלה דו-ממדית.

(4) (א) נתון: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$AD\perp BC$, $A'D'\perp B'C'$

צ"ל: $\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}$



הוכחה:

טענה	נימוק
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$	נתון.
$\Downarrow$	
$\measuredangle B=\measuredangle B'$	במשולשים דומים זוויות מתאימות שוות זו לזו.
$\measuredangle ADB=90^\circ$	נתון.
$\measuredangle A'D'B'=90^\circ$	נתון.
$\Downarrow$	
$\measuredangle ADB=\measuredangle A'D'B'$	זוויות ישרות שוות זו לזו.

המשך בעמוד הבא >>>

$\Downarrow$

$\Delta ABD \sim \Delta A'B'D'$ לפי משפט דמיון ז.ז.

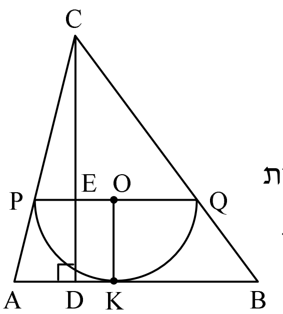
$\Downarrow$

$\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'}$ פרופורציית צלעות מתאימות במשולשים דומים.

מ.ש.ל. (א).

(ב) נתון: $R = 6$ ס"מ , $CD \perp AB$,

$PQ \parallel AB$, $AB = 20$ ס"מ . צ"ל: $CE = ?$



(1) $PQ \parallel AB$ נתון.

(2) $\measuredangle CPQ = \measuredangle CAB$ זוויות מתאימות שוות

$\measuredangle CQP = \measuredangle CBA$ בין ישרים מקבילים.

$\Downarrow$

$\Delta CPQ \sim \Delta CAB$ לפי משפט דמיון ז.ז.

$\measuredangle CEQ = \measuredangle CDB = 90°$ זוויות מתאימות

בין מקבילים PQ ו- AB וחותך CD ,

$\Downarrow$ שוות זו לזו.

$CE \perp PQ$

(3) $\frac{CE}{CD} = \frac{PQ}{AB}$ לפי המשפט מסעיף (א).

$\Downarrow$

(4) $PQ = 2R = 12$ ס"מ הצבה לפי הנתון.

(5) $OK \perp AB$ המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

(6) $ED \perp OK$ נתון.

(7) $ED \parallel OK$ אם זוויות מתאימות שוות זו לזו,

הישרים מקבילים.

(8) $OE \parallel KD$ נתון.

$\Downarrow$

(9) EOKD מקבילית מרובע בעל שני זוגות של צלעות נגדיות

מקבילות הוא מקבילית.

המשך בעמוד הבא >>>

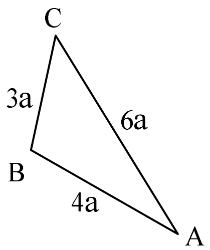
(10) $ED = OK = R = 6$ ס"מ

(11) $\frac{CE}{CE+6} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ לפי (3) והצבת (4), (10) ו- $AB = 20$ ס"מ ב- (3), חיבור קטעים.

$5 \cdot CE = 3 \cdot CE + 18$ פעולות אלגבריות.

$2 \cdot CE = 18$

$CE = 9$ ס"מ מ.ש.ל. (ב).



(5) נתון: $AB : BC = 4 : 3$

$BC : AC = 1 : 2$

נסמן: $BC = 3a$

אז $AC = 6a \ , \ AB = 4a$

(א) לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔABC :

$$AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2BC \cdot BA \cdot \cos\measuredangle B$$

$$36a^2 = 9a^2 + 16a^2 - 24a^2 \cdot \cos\measuredangle B \ \Rightarrow \ 24\cos\measuredangle B = -11$$

$$\cos\measuredangle B = -\tfrac{11}{24} \ \Rightarrow \ \measuredangle B = \pm 117.28° + 360°k$$

לפי משמעות השאלה: $\measuredangle B = 117.28°$

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cos\measuredangle C$$

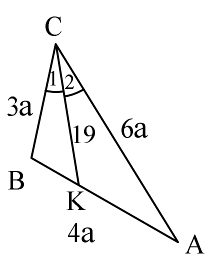
$$16a^2 = 9a^2 + 36a^2 \cos\measuredangle C \ \Rightarrow \ 36\cos\measuredangle C = 29$$

$$\cos\measuredangle C = \tfrac{29}{36} \ \Rightarrow \ \measuredangle C = \pm 36.34° + 360°k$$

לפי משמעות השאלה: $\measuredangle C = 36.34°$

$$\measuredangle A = 180° - 117.28° - 36.34° = 26.38°$$

(ב) נתון: $CK = 19$ ס"מ , $\measuredangle C_1 = \measuredangle C_2$



לפי משפט חוצה זווית:

$$\frac{BK}{KA} = \frac{CB}{CA} \ \Rightarrow \ \frac{BK}{4a - BK} = \frac{1}{2}$$

$$2BK = 4a - BK \ \Rightarrow \ BK = \tfrac{4}{3}a$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔBCK :

$$CK^2 = BC^2 + BK^2 - 2 \cdot BC \cdot BK \cos \measuredangle B$$
$$361 = 9a^2 + \tfrac{16}{9}a^2 - 8 \cdot a^2 \cdot \left(-\tfrac{11}{24}\right)$$
$$361 = \frac{81+16+33}{9}a^2 \quad \Rightarrow \quad 361 = \frac{130}{9}a^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{361 \cdot 9}{130}$$
$$a = \frac{19 \cdot 3}{\sqrt{130}} = 4.9992 \approx 5 \text{ ס"מ}$$

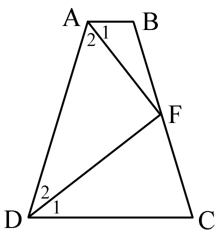
מכאן, $AB = 20$ ס"מ , $BC = 15$ ס"מ , $AC = 30$ ס"מ

<u>דרך אחרת:</u>

$$\measuredangle C_1 = \measuredangle C_2 = \tfrac{1}{2}\measuredangle C = 18.17^\circ$$
$$\measuredangle CKB = 180^\circ - \measuredangle C_1 - \measuredangle B = 180^\circ - 18.17^\circ - 117.28^\circ = 44.55^\circ$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔBCK :

$$\frac{CK}{\sin \measuredangle B} = \frac{CB}{\sin \measuredangle BKC} \quad \Rightarrow \quad \frac{19}{\sin 117.28^\circ} = \frac{3a}{\sin 44.55^\circ}$$
$$3a = \frac{19 \cdot \sin 44.55^\circ}{\sin 117.28^\circ} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{19\sin 44.55^\circ}{3\sin 117.28^\circ} = 4.999 \approx 5 \text{ ס"מ}$$



(6) נתון : $\measuredangle D_1 = \measuredangle D_2$, $AD = BC$, $AB \parallel DC$

$AB = b$, $\measuredangle FAB = \beta$

$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2 = \beta$

$\measuredangle ADC + \measuredangle BAD = 180^\circ$ כזוג זוויות חד-צדדיות

בין ישרים מקבילים, ולכן : $\measuredangle ADC = 180^\circ - \measuredangle BAD = 180^\circ - 2\beta$

מכאן : $\measuredangle D_1 = \measuredangle D_2 = \dfrac{180 - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta$

זוויות בסיס שוות בטרפז שווה-שוקיים. לכן : $\measuredangle DAB = \measuredangle ABC = 2\beta$

סכום הזוויות ב- ΔABF הוא 180° :

$$\measuredangle AFB = 180^\circ - \beta - 2\beta = 180^\circ - 3\beta$$

ולפי משפט הסינוסים :

$$\frac{AF}{\sin 2\beta} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - 3\beta)} \quad \Rightarrow \quad \frac{AF}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin 3\beta} \quad \Rightarrow \quad AF = \frac{b\sin 2\beta}{\sin 3\beta}$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

ב- $\Delta\,\mathrm{AFD}$ לפי משפט הסינוסים:
$$\frac{\mathrm{AF}}{\sin(90^\circ-\beta)}=\frac{\mathrm{DF}}{\sin\beta}$$

$$\frac{b\sin2\beta}{\sin3\beta\cos\beta}=\frac{\mathrm{DF}}{\sin\beta}\ \Rightarrow\ \frac{b\cdot2\sin\beta\cancel{\cos\beta}}{\sin3\beta\cancel{\cos\beta}}=\frac{\mathrm{DF}}{\sin\beta}\ \Rightarrow\ \mathrm{DF}=\frac{2b\sin^2\beta}{\sin3\beta}$$

ב- $\Delta\,\mathrm{DCF}$ לפי משפט הסינוסים:
$$\frac{\mathrm{DF}}{\sin(180^\circ-2\beta)}=\frac{\mathrm{DC}}{\sin\measuredangle\mathrm{DFC}}$$

בטרפז שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות. לכן: $\measuredangle\mathrm{C}=\measuredangle\mathrm{D}=180^\circ-2\beta$

$$\measuredangle\mathrm{DFC}=180^\circ-(90^\circ-\beta)-(180^\circ-2\beta)=3\beta-90^\circ$$

(סכום הזוויות ב- $\Delta\,\mathrm{DCF}$ הוא 180°), ואז:

$$\frac{2b\sin^2\beta}{\sin3\beta\sin2\beta}=\frac{\mathrm{DC}}{\sin(3\beta-90^\circ)}$$

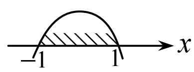
$$\frac{2b\sin^2\beta}{\sin3\beta\cdot2\sin\beta\cos\beta}=\frac{\mathrm{DC}}{-\cos3\beta}$$

$$\mathrm{DC}=-\frac{b\sin\beta\cos3\beta}{\cos\beta\sin3\beta}=-\frac{b\tan\beta}{\tan3\beta}$$

(7)
$$f(x)=\sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}=\sqrt{(1-x)(1+x)(1+2x^2)}$$

(א) לכל x מתקיים: $x^2\ge0\ \Rightarrow\ 2x^2\ge0\ \Rightarrow\ 2x^2+1>0$

תחום ההגדרה: $(1-x^2)(1+2x^2)\ge0\ \Rightarrow\ 1-x^2\ge0$



כלומר, תחום ההגדרה של $f(x)$: $-1\le x\le1$.

(ב) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y: $x=0$

$$f(0)=1\ \Rightarrow\ (0,1)$$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x: $y=0$

$$0=\sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}$$

$$1+2x^2\ne0\ \Rightarrow\ 1-x^2=0\ \Rightarrow\ x=\pm1\ \Rightarrow\ (1,0)\ ,\ (-1,0)$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ג)

$$f'(x)=\left(\sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}\right)'=\left(\sqrt{-2x^4+x^2+1}\right)'=$$

$$=\frac{-8x^3+2x}{2\sqrt{-2x^4+x^2+1}}=\frac{2x(1-4x^2)}{2\sqrt{-2x^4+x^2+1}}=\frac{x(1-4x^2)}{\sqrt{-2x^4+x^2+1}}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{x(1-4x^2)}{\sqrt{-2x^4+x^2+1}}=0 \;\Rightarrow\; x(1-2x)(1+2x)=0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases},\quad \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4} \end{cases},\quad \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{3\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

נוסיף לנקודות החשודות לקיצון גם את קצות הקטע: $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

היות והפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה $[-1,1]$.

לפי ערכי ה- y אפשר לקבוע כי:

שיעורי נקודות מקסימום מוחלט $\left(\pm\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$,

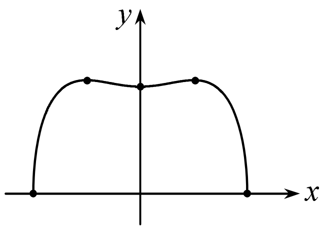
שיעורי נקודת מינימום $(0,1)$,

ושיעורי נקודות מינימום מוחלט $(\pm1,0)$.

(ד) תחומי עלייה: $-1\le x<-\frac{1}{2}$, $0<x<\frac{1}{2}$.

תחומי ירידה: $\frac{1}{2}<x\le1$, $-\frac{1}{2}<x<0$.

(ה) ראו סקיצה משמאל.



(8) $f(x)=\frac{mx-2x^2-24}{nx^2}=\frac{m}{nx}-\frac{2}{n}-\frac{24}{nx^2}$

(א) נתון כי $y=-2$ אסימפטוטה אופקית של הפונקציה.

מהפונקציה נסיק כי משוואת האסימפטוטה האופקית לגרף הפונקציה היא $y=-\frac{2}{n}$ ($\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\frac{2}{n}$), לכן: $-\frac{2}{n}=-2 \Rightarrow n=1$

גם נתון כי: $f'(-2)=-10$

$$f'(x)=-\frac{m}{nx^2}+\frac{48}{nx^3}=-\frac{m}{x^2}+\frac{48}{x^3}$$

$$-\frac{m}{(-2)^2}+\frac{48}{(-2)^3}=-10 \Rightarrow -\frac{m}{4}-6=-10 \Rightarrow m=16$$

$$f(x)=\frac{-2x^2+16x-24}{x^2}=\frac{-2(x^2-8x+12)}{x^2}$$

(ב) תחום ההגדרה: $x\neq 0$ (כל x השונה מאפס).

(ג) אין נקודות חיתוך עם ציר ה- y כי $x=0$ אינו שייך לתחום ההגדרה.

שיעורי נקודות חיתוך עם ציר ה- x: $y=0 \Rightarrow \frac{-2(x^2-8x+12)}{x^2}=0$

$$x^2-8x+12=0$$

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\frac{8\pm 4}{2} \Rightarrow (6,0)\ ,\ (2,0)$$

(ד) אסימפטוטה אנכית $x=0$,

אסימפטוטה אופקית $y=-2$. ($\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-2$)

(ה) $f'(x)=-\frac{m}{x^2}+\frac{48}{x^3}=\frac{-16}{x^2}+\frac{48}{x^3} \Rightarrow f'(x)=\frac{-16}{x^3}(x-3)$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-16}{x^3}(x-3)=0 \Rightarrow x-3=0$$

$$x=3\ ,\ y=\frac{-2(9-24+12)}{9}=\frac{2}{3}$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

x	x < 0	x = 0	0 < x < 3	x = 3	x > 3
y′	−	נקודת אי-הגדרה	+	0	−
y	↘		↗	max	↘

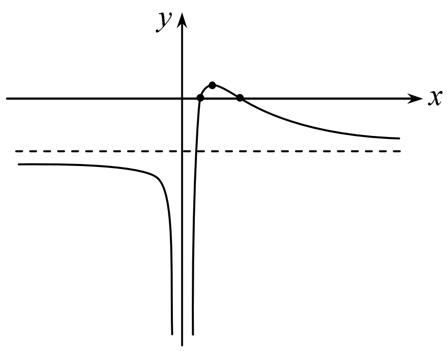
$$f'(-1)=-\frac{16}{(-1)^2}+\frac{48}{(-1)^3}<0$$

$$f'(1)=-\frac{16}{1^2}+\frac{48}{1^3}>0$$

$$f'(4)=-\frac{16}{4^2}+\frac{48}{4^3}<0$$

$$\max\left(3,\tfrac{2}{3}\right)$$

(ו)

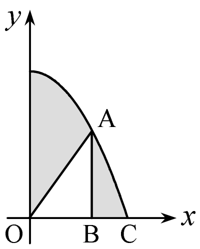


(9) $y=18-6x^2$, $x\ge 0$.

(א) נסמן $x_A=t$

לכן, $y_A=18-6t^2$.

נסמן ב- C את נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- x .



$$y_C=0 \;\Rightarrow\; 18-6x^2=0 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{3}\;,\; x>0 \;\Rightarrow\; x_C=\sqrt{3}$$

$$C(\sqrt{3},0) \;\Rightarrow\; 0\le t\le\sqrt{3}$$

$$OB=x_B-x_O=t-0=t$$

$$AB=y_A-y_B=18-6t^2-0=18-6t^2$$

$$S(t)=S_{\Delta AOB}=\tfrac{1}{2}OB\cdot AB=\tfrac{1}{2}t\left(18-6t^2\right)=9t-3t^3$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$S'(\mathrm{t}) = 9 - 9\mathrm{t}^2$

$S'(\mathrm{t}) = 0 \;\Rightarrow\; 9 - 9\mathrm{t}^2 = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{t}^2 = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{t} = \pm 1 \;,\; \mathrm{t} > 0$

$\mathrm{t} = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{A}(1,12)$

$S''(\mathrm{t}) = -18\mathrm{t} \;,\; S''(1) < 0 \;\Rightarrow\; \max$

שטח המשולש AOB מקסימלי עבור נקודה A ששיעוריה $(1,12)$.

ב) $S_{\underset{\text{מקסימלי}}{\Delta\,\mathrm{AOB}}} = S(1) = 9 - 3 =$ 6 יחידות שטח

נמצא את השטח המוגבל על-ידי הפרבולה והצירים.

$S_{(\text{מתחת לפרבולה})} = \int_0^{\sqrt{3}} (18 - 6x^2)\,dx = (18x - 2x^3)\Big|_0^{\sqrt{3}} =$

$18\sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3}\right)^3 - 0 = 18\sqrt{3} - 2 \cdot 3\sqrt{3} =$ $12\sqrt{3}$ יחידות שטח

$S_{\text{אפור}} = S_{(\text{מתחת לפרבולה})} - S_{\underset{\text{מקסימלי}}{\Delta\,\mathrm{AOB}}} = 12\sqrt{3} - 6 \approx$ 14.78 יחידות שטח

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות