

**פתרון מבחן מס' 6 (ספר לימוד – שאלון 035804)**

09-05-2017

- (1) נסמן ב-  $x$  (קמ"ש) את מהירות זרם המים בנהר.  
 נסמן ב-  $y$  (קמ"ש) את מהירות הסירה במים עומדים.

זמן (בשעות)	דרך (בק"מ)	מהירות (בקמ"ש)	
$\frac{48}{y+x}$	48	$y+x$	לעבור את המרחק שבין שתי הנקודות עם הזרם
$\frac{48}{y-x}$	48	$y-x$	לעבור את המרחק שבין שתי הנקודות נגד הזרם
$\frac{4}{y+x}$	4	$y+x$	לעבור 4 ק"מ עם הזרם
$\frac{3}{y-x}$	3	$y-x$	לעבור 3 ק"מ נגד הזרם

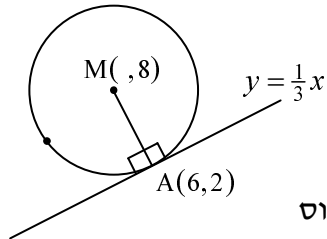
מהנתונים בשאלה נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \frac{48}{y+x} + \frac{48}{y-x} = 14 \\ \frac{4}{y+x} = \frac{3}{y-x} \end{cases} \Rightarrow 4y - 4x = 3y + 3x \Rightarrow y = 7x$$

נציב  $7x$  במקום  $y$  במשוואה הראשונה ונקבל:

$$\frac{48}{8x} + \frac{48}{6x} = 14 \Rightarrow \frac{6}{x} + \frac{8}{x} = 14 \Rightarrow x = 1$$

**תשובה:** מהירות הזרם בנהר 1 קמ"ש,  
 מהירות הסירה במים עומדים 7 קמ"ש.



(2) נוסף סרטוט ונעלה עליו את הנתונים

שבשאלה (לא במערכת צירים).

(א) נמצא את משוואת AM.

השיפוע של המשיק הוא  $\frac{1}{3}$  ולכן שיפוע

הרדיוס AM הוא  $-3$  (משיק מאונך לרדיוס

בקצהו ומכפלת שיפועי ישרים מאונכים שווה ל- $-1$ ).

כלומר משוואת AM :  $y - y_A = m_{AM}(x - x_A)$

$$y - 2 = -3(x - 6) \Rightarrow y = -3x + 20$$

הנקודה M נמצאת על הישר AM, כלומר מקיימת את משוואת AM :

$$8 = -3x + 20 \Rightarrow 3x = 20 - 8 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

כלומר,  $M(4, 8)$ .

נמצא את רדיוס המעגל :  $AM = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2}$

$$R = AM = \sqrt{(6 - 4)^2 + (2 - 8)^2} = \sqrt{40}$$

משוואת המעגל :  $(x - 4)^2 + (y - 8)^2 = 40$ .

(ב) כדי להראות שמרובע AMCO הוא טרפז ישר-זווית,

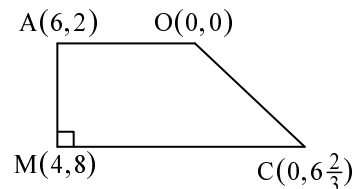
נמצא את שיפועי הצלעות AM, MC, AO ו-OC ונקבל :

$$m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{8 - 2}{4 - 6} = -3$$

$$m_{MC} = \frac{y_C - y_M}{x_C - x_M} = \frac{6\frac{2}{3} - 8}{0 - 4} = \frac{-\frac{4}{3}}{-4} = \frac{1}{3}$$

$$m_{AO} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{2 - 0}{6 - 0} = \frac{1}{3}$$

$$m_{OC} = \frac{y_C - y_O}{x_C - x_O} = \frac{6\frac{2}{3} - 0}{0 - 0} \Rightarrow \text{לא מוגדר}$$



(OC מתלכד עם ציר ה- $y$ ).

$$m_{MC} = m_{AO} \Rightarrow MC \parallel AO$$

$$m_{AM} \neq m_{OC} \Rightarrow AM \not\parallel OC$$

$$m_{AM} \cdot m_{MC} = m_{AM} \cdot m_{AC} = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$$

לכן :  $MC \perp AM$ ,  $AC \perp AM$ .

**מסקנה:** מרובע AMCO הוא טרפז ישר-זווית.

המשך בעמוד הבא <<<

נחשב את אורכי הקטעים AO , MC ו-AM :

$$AO = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(6-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{40} \text{ יחידות אורך}$$

$$MC = \sqrt{(x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2} = \sqrt{(0-4)^2 + (6\frac{2}{3}-8)^2} = \sqrt{\frac{160}{9}} = \frac{\sqrt{160}}{3} \text{ יחידות אורך}$$

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(4-6)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{40} \text{ יחידות אורך}$$

$$S_{\text{טרפז}} = \frac{(AO+MC)AM}{(\sqrt{40} + \frac{2\sqrt{160}}{3}) \cdot \sqrt{40}} = \frac{(\sqrt{40} + \frac{\sqrt{160}}{3})\sqrt{40}}{40 + \frac{80}{3}} = \frac{160}{3} = 33\frac{1}{3} \text{ יחידות שטח}$$

	$\bar{B}$	B	
0.7	0.07	0.63	A
0.3	<b>0.12</b>	0.18	$\bar{A}$
1	0.19	0.81	

$$P(\bar{A}) = 0.3$$

(3) נתון:

$$P(B / A) = 0.9$$

$$P(\bar{A} / \bar{B}) = \frac{12}{19}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.3 = 0.7 \quad (\text{א})$$

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.9 = \frac{P(A \cap B)}{0.7} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.63$$

$$P(\bar{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.63 = 0.07$$

נסמן:  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = x$ , ואז:

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.3 - x$$

$$P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.07 + x$$

$$P(\bar{A} / \bar{B}) = \frac{12}{19} \Rightarrow \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{12}{19} \Rightarrow \frac{x}{0.07+x} = \frac{12}{19} \quad \text{לפי הנתון:}$$

$$19x = 0.84 + 12x \Rightarrow 7x = 0.84 \Rightarrow x = 0.12$$

◀◀◀ המשך בעמוד הבא

נמלא את מה שמצאנו בטבלה למעלה ונקבל:

$$P(A \cap \bar{B}) = 0.07, P(\bar{B}) = 0.19$$

$$P(\text{הצלחה לפחות באחת הבחינות}) = P(A \cup B) = \quad (ב)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.81 - 0.63 = 0.88$$

אפשר לחשב גם כך:

$$P(\text{הצלחה לפחות באחת הבחינות}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0.12 = 0.88$$

(4) נתון:  $AB \parallel DC$ ,  $AB = 9$  ס"מ,  $CD = 21$  ס"מ.

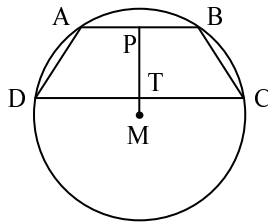
בניית עזר: קטע  $PM$  כך ש-  $PM \perp AB$ ,

מתקיים גם:  $PM \perp DC$  (מכיוון ש-  $AB \parallel DC$  ו-  $PM \perp AB$ ).

רדיוס המאונך למיתר חוצה את המיתר, לכן:

$$DT = TC = \frac{21}{2} = 10.5 \text{ ס"מ}$$

$$AP = PB = \frac{9}{2} = 4.5 \text{ ס"מ}$$



(א) (i) נתבונן ב-  $\triangle MPB$ . לפי משפט פיתגורס:

$$PM^2 + 4.5^2 = R^2 \Rightarrow PM = \sqrt{R^2 - 20.25}$$

(ii) נתבונן ב-  $\triangle MTC$ . לפי משפט פיתגורס:

$$MT^2 + 10.5^2 = R^2 \Rightarrow MT = \sqrt{R^2 - 110.25}$$

(ב) נתון:  $PT = 8$  ס"מ, כלומר:  $PM - MT = 8$

נציב את הביטויים שקיבלנו בסעיף (א) ונקבל:

$$\sqrt{R^2 - 20.25} - \sqrt{R^2 - 110.25} = 8$$

$$\sqrt{R^2 - 20.25} = 8 + \sqrt{R^2 - 110.25}$$

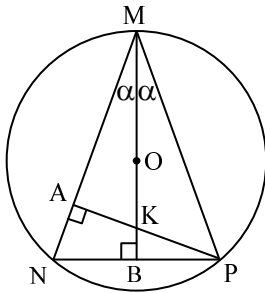
שני האגפים של המשוואה חיוביים, לכן ניתן להעלות בריבוע את שניהם.

$$R^2 - 20.25 = 64 + 16\sqrt{R^2 - 110.25} + R^2 - 110.25$$

$$26 = 16\sqrt{R^2 - 110.25} \Rightarrow 13 = 8\sqrt{R^2 - 110.25}$$

המשך בעמוד הבא <<<

נעלה בריבוע את שני האגפים ונקבל:  $169 = 64 \cdot (R^2 - 110.25)$   
 $169 = 64R^2 - 7056 \Rightarrow 64R^2 = 7225 \Rightarrow R = \frac{85}{8} = 10.625$  ס"מ  
 (הפתרון  $R = -10.625$  מתבטל כי  $R > 0$ ).



$MN = NP$  ,  $\sphericalangle MNP = 2\alpha$  ,  $(\alpha < 30^\circ)$  (5)

$MB \perp NP$  ,  $PA \perp MN$

במשולש שווה-שוקיים, הגובה לבסיס (MB) הוא גם תיכון לבסיס וגם חוצה-זווית הראש.



$\sphericalangle NMB = \sphericalangle BMP = \frac{1}{2}\sphericalangle M$      $NB = BP = \frac{1}{2}NP$

נסמן:  $\frac{1}{2}\sphericalangle M = \alpha$

(א) במשולש ישר-זווית APM:  $\sphericalangle APM = 90^\circ - \sphericalangle M = 90^\circ - 2\alpha$

$\sphericalangle MKP = 180^\circ - \sphericalangle KMP - \sphericalangle MPK = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - 2\alpha) = 90^\circ + \alpha$

זוויות המשולש MPK הן:  $\alpha$  ,  $90^\circ - 2\alpha$  ,  $90^\circ + \alpha$ .

(ב) לפי משפט הסינוסים ב-  $\triangle MNP$ :

$\frac{MP}{\sin \sphericalangle N} = 2R$

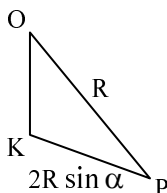
$\frac{MP}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R \Rightarrow MP = 2R \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = 2R \cos \alpha$

$\frac{MP}{\sin \sphericalangle K} = \frac{MK}{\sin \sphericalangle P}$  : לפי משפט הסינוסים ב-  $\triangle MKP$

$\frac{2R \cos \alpha}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{MK}{\sin(90^\circ - 2\alpha)}$

$\frac{2R \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{MK}{\cos 2\alpha} \Rightarrow MK = 2R \cos 2\alpha$

$\frac{MP}{\sin \sphericalangle K} = \frac{KP}{\sin \sphericalangle M} \Rightarrow \frac{2R \cos \alpha}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{KP}{\sin \alpha} \Rightarrow KP = 2R \sin \alpha$



(ג) אנך אמצעי למיתר (BM) עובר דרך מרכז המעגל.

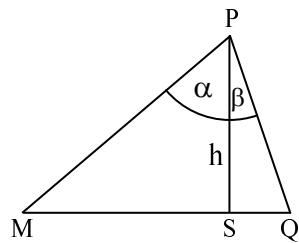
$OM = OP = R \Rightarrow \sphericalangle OPM = \sphericalangle OMP = \alpha$

$\sphericalangle OPK = \sphericalangle MPK - \sphericalangle MPO = 90^\circ - 2\alpha - \alpha = 90^\circ - 3\alpha$

המשך בעמוד הבא <<<

$$S_{\Delta OPK} = \frac{OP \cdot PK}{2} \cdot \sin \angle OPK =$$

$$S_{\Delta OPK} = \frac{R \cdot 2R \sin \alpha}{2} \cdot \sin(90^\circ - 3\alpha) = R^2 \sin \alpha \cos 3\alpha$$



(6) (א) ניעזר בנתונים שבסרטוט:

$$\Delta PSQ : \tan \beta = \frac{SQ}{h} \Rightarrow SQ = h \tan \beta$$

$$\Delta PSM : \tan \alpha = \frac{MS}{h} \Rightarrow MS = h \tan \alpha$$

לכן:

$$S_{\Delta PMQ} = \frac{MQ \cdot h}{2} = \frac{(h \tan \alpha + h \tan \beta) \cdot h}{2} = \frac{1}{2} h^2 (\tan \alpha + \tan \beta)$$

(i) (ב) מרובע PESF חסום במעגל ו-  $\angle EPF = \alpha + \beta$ .

מכיון שסכום זוויות נגדיות במרובע החסום במעגל שווה ל-  $180^\circ$ ,  
 $\angle ESF = 180^\circ - (\alpha + \beta)$  הרי ש:

(ii) נסמן ב-O את מרכז המעגל. מכיון ש-PS הוא קוטר,

הרי ש-  $\angle PES = \angle PFS = 90^\circ$  (זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל-  $90^\circ$ ).

$$\Delta PES : \sin \alpha = \frac{ES}{h} \Rightarrow ES = h \sin \alpha$$

$$\Delta PFS : \sin \beta = \frac{SF}{h} \Rightarrow SF = h \sin \beta$$

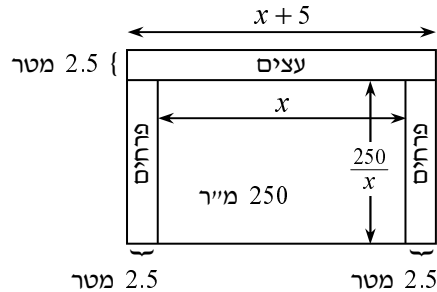
$$S_{\Delta ESF} = \frac{ES \cdot SF \cdot \sin \angle ESF}{2} = \frac{h \sin \alpha \cdot h \sin \beta \cdot \sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]}{2}$$

מכיון ש-  $\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)] = \sin(\alpha + \beta)$  נקבל:

$$S_{\Delta ESF} = \frac{h^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{2}$$

כלומר:

$$\frac{S_{\Delta ESF}}{S_{\Delta PMQ}} = \frac{\frac{1}{2} h^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{\frac{1}{2} h^2 (\tan \alpha + \tan \beta)} = \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{\tan \alpha + \tan \beta}$$



(7) נסמן ב-  $x$  (מטרים) את אורך אחת הצלעות של המבנה המלבני ששטחו 250 מ"ר. ניעזר בסרטוט ובסימונים שעליו. שטח המבנה המלבני הוא 250 מ"ר ואורך אחת מצלעותיו  $x$  מטר, לכן אורך הצלע השנייה  $\frac{250}{x}$  מטר.

לפנינו שאלת מינימום שבה פונקציית המטרה היא עלות הגינון. מחיר מ"ר גינון בעצים:  $50 =$  ש"ח  $\cdot 40 = 1.25 \cdot 40$ .

$$f(x) = \underbrace{40 \cdot 2.5 \cdot \frac{250}{x} \cdot 2}_{\text{עלות הגינון}} + \underbrace{50 \cdot 2.5(x+5)}_{\text{עלות גינון חלקת העצים}}$$

$$f(x) = \frac{50,000}{x} + 125x + 625$$

$$f'(x) = -\frac{50,000}{x^2} + 125 = 0$$

$$-50,000 + 125x^2 = 0 \Rightarrow 125x^2 = 50,000$$

$$x^2 = 400 \Rightarrow x = 20 \quad (\text{הפתרון } x = -20 \text{ נפסל})$$

$$f''(x) = \left(-\frac{50,000}{x^2}\right)' = -50,000 \cdot \left(\frac{-2}{x^3}\right) = \frac{100,000}{x^3} \quad \text{לקביעת סוג הקיצון:}$$

$$f''(20) > 0 \Rightarrow \min$$

נשאלנו מה צריך להיות אורך חזית החלקה והוא מסומן על-ידי  $x+5$  מטרים. **תשובה:** כדי שעלות הגינון תהיה מינימלית, אורך חזית החלקה צריך להיות 25 מטר.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+m)^2} = 0 \Rightarrow (x+m)^2 = 1 \quad (8) \quad (א)$$

כלומר:  $x+m=1$  או  $x+m=-1$ .

מכיוון שנתון:  $x_1 > x_2$ , הרי:  $x_1 = 1-m$ ,  $x_2 = -1-m$ .

$$x_1 = 2x_2 \Rightarrow 1-m = 2(-1-m) \quad (ב)$$

$$1-m = -2-2m \Rightarrow m = -3$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$f(x) = x + \frac{1}{x-3} \quad (ג)$$

מצאנו את שיעור ה- $x$  של הנקודות החשודות לקיצון.

$$x_1 = 1 - (-3) = 4 \Rightarrow y_1 = 4 + \frac{1}{4-3} = 5 \Rightarrow (4,5)$$

$$x_2 = -1 - (-3) = 2 \Rightarrow y_2 = 2 + \frac{1}{2-3} = 1 \Rightarrow (2,1)$$

נשים לב ש- $x = 3$  היא משוואת האסימפטוטה האנכית, כי  $x = 3$

אינו נמצא בתחום ההגדרה ( $x = 3$  מאפס מכנה).

למציאת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה, ניעזר בטבלה:

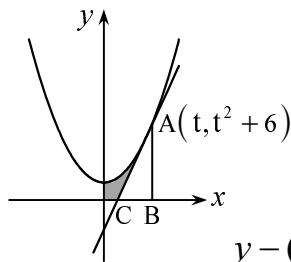
x	$x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$f'(x)$	+	max	-	נקודת אי-הגדרה	-	min	+
$f(x)$	↗		↘		↘		↗

$$f'(1) = 1 - \frac{1}{(1-3)^2} > 0 \quad f'(2.5) = 1 - \frac{1}{(2.5-3)^2} < 0$$

$$f'(3.5) = 1 - \frac{1}{(3.5-3)^2} < 0 \quad f'(5) = 1 - \frac{1}{(5-3)^2} > 0$$

ונקבל:  $\max(2,1)$ ,  $\min(4,5)$ .

תחומי עלייה:  $x < 2$ ,  $x > 4$ . תחומי ירידה:  $2 < x < 3$ ,  $3 < x < 4$ .



(9) (א) נמצא את שיפוע המשיק:

$$y' = 2x$$

$$m = y'(t) = 2t$$

לכן משוואת המשיק:

$$y - (t^2 + 6) = 2t(x - t) \Rightarrow y = 2tx - t^2 + 6$$

(ב) נציב  $x = 0$  במשוואת המשיק ונקבל את נקודת החיתוך של המשיק

עם ציר ה- $y$ :  $(0, 6 - t^2)$ .

נציב  $y = 0$  במשוואת המשיק ונקבל את נקודת החיתוך של המשיק

$$0 = 2tx - t^2 + 6 \Rightarrow 2tx = t^2 - 6 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 6}{2t}$$

כלומר:  $(\frac{t^2 - 6}{2t}, 0)$ .

המשך בעמוד הבא <<<

- (ג) נוריד אנך מנקודה A לציר ה- $x$  ונסמן את נקודת החיתוך ב- B .  
 נסמן ב- C את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$  .  
 נשים לב שניתן לחשב את השטח המבוקש בצורה הבאה :

$$S_{\text{מבוקש}} = \int_0^t (x^2 + 6) dx - S_{\Delta ABC}$$

$$\int_0^t (x^2 + 6) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + 6x \right]_0^t = \frac{t^3}{3} + 6t$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{(t^2 + 6) \cdot \left(t - \frac{t^2 - 6}{2t}\right)}{2} = \frac{(t^2 + 6) \cdot \frac{2t^2 - t^2 + 6}{2t}}{2} =$$

$$= \frac{(t^2 + 6)(t^2 + 6)}{4t}$$

$$S_{\text{מבוקש}} = \frac{t^3}{3} + 6t - \frac{(t^2 + 6)(t^2 + 6)}{4t} = \frac{t^3}{3} + 6t - \frac{t^4 + 12t^2 + 36}{4t} = \text{לכן:}$$

$$= \frac{1}{3}t^3 + 6t - \frac{t^3}{4} - 3t - \frac{9}{t} = \frac{1}{12}t^3 + 3t - \frac{9}{t}$$

$$\frac{1}{12}t^3 + 3t - \frac{9}{t} = \frac{99}{4t} \quad / \cdot 12t \quad (\text{ד})$$

$$t^4 + 36t^2 - 108 = 297$$

$$t^4 + 36t^2 - 405 = 0$$

$$y^2 + 36y - 405 = 0 \quad \text{נסמן } y = t^2 \text{ ונקבל את המשוואה הריבועית:}$$

$$y_{1,2} = \frac{-36 \pm 54}{2}$$

כלומר:  $y_1 = 9$ ,  $y_2 = -45$  ( $y_2 = -45$  נפסל).

לכן  $9 = t^2$  ומכאן  $t = 3$  ( $t = -3$  נפסל כי נתון  $t > 3$ ).

**גבי יקואל**

**מ ש ב צ ת**

**[www.mishbetzet.co.il](http://www.mishbetzet.co.il)**

**טלפון: 04-8200929**

**ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה**

**לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות**