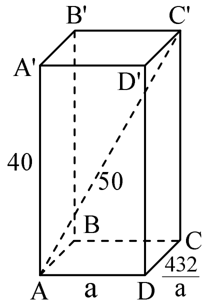
# פתרון מבחן מס' 5 (ספר לימוד – שאלון 035804)

09-05-2017




**(1)** (א) נבטא את שטח הבסיס ABCD .

לפי הנתון, $S_{ABCD} = DC \cdot AD = 432$ מ"ר

נסמן: $AD = a$

נקבל את המשוואה: $a \cdot DC = 432$

לכן: $DC = \frac{432}{a}$

נתון גובה התיבה: $CC' = AA' = 40$ מטר

נתון אורך אלכסון התיבה: $AC' = 50$ מטר

$$(AC')^2 = (AD)^2 + (DC)^2 + (CC')^2$$

נציב את הידוע ונקבל: $50^2 = a^2 + \left(\frac{432}{a}\right)^2 + 40^2$

$$2{,}500 = a^2 + \frac{186{,}624}{a^2} + 1{,}600$$

$$a^2 - 900 + \frac{186{,}624}{a^2} = 0$$

נסמן $a^2 = t$ ונקבל: $t - 900 + \frac{186{,}624}{t} = 0$

$$t^2 - 900t + 186{,}624 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{900 \pm \sqrt{810{,}000 - 746{,}496}}{2} = \frac{900 \pm 252}{2}$$

$$t_1 = 576 \ , \ t_2 = 324$$

כלומר, $a = \pm\sqrt{324} = \pm 18$ או $a = \pm\sqrt{576} = \pm 24$

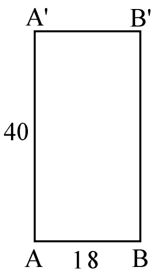
$a > 0$ , לכן: $a_1 = 24 \ , \ a_2 = 18$

אם $a = 24$ אז: $DC = \frac{432}{a} = \frac{432}{24} = 18$ מטר , $AD = a = 24$ מטר

אם $a = 18$ אז: $DC = \frac{432}{a} = \frac{432}{18} = 24$ מטר , $AD = a = 18$ מטר

ולפי הנתון $AD > DC$ נסיק ש- $AD = 24$ מטר , $DC = 18$ מטר .

המשך בעמוד הבא ◄◄◄




(ב) שני הקירות הרצויים הם בעלי אותו שטח.

$AB =$ 18 מטר $= 1{,}800$ ס"מ

$A'A =$ 40 מטר $= 4{,}000$ ס"מ

ממדי המרצפת הם 20 ס"מ ו- 12 ס"מ,

1,800 ו- 4,000 מתחלקים ב- 12, וב- 20 בהתאמה.

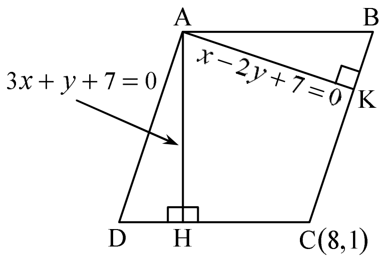
לפיכך, כדי לרצף קיר במספר שלם של מרצפות יש להניח כל מרצפת, כך שהצלע שאורכה 12 ס"מ תהיה מקבילה לצלע AB, והצלע שאורכה 20 ס"מ תהיה מקבילה ל- A'A.

אם כן, לאורך AB יונחו 200 מרצפות $= 4{,}000 : 20$.

ולאורך A'A יונחו 150 מרצפות $= 1{,}800 : 12$.

אם כן, לריצוף כל קיר נדרשות 30,000 מרצפות $= 200 \cdot 150$.

ולכן, לשני הקירות נדרשות 60,000 מרצפות.




**(2)** (א) שיעורי קדקוד A יתקבלו מפתרון מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x-2y+7=0 \\ 3x+y+7=0 \quad \Rightarrow \quad A(-3,2) \end{cases}$$

שיפוע AK הוא $\frac{1}{2}$, לכן $m_{BC}=-2$,

מכיוון ש- $AK \perp BC$ ומכפלת שיפועי ישרים מאונכים שווה ל- $-1$.

מכיוון ש- $AD \parallel BC$, הרי שגם $m_{AD}=-2$.

מכאן בעזרת שיעורי הנקודה $A(-3,2)$ ושיפוע $m_{AD}=-2$,

נמצא את משוואת AD: $y-2=-2(x+3) \quad \Rightarrow \quad y=-2x-4$

בדרך דומה נמצא את משוואת הישר DC. נקבל: $y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$.

שיעורי הנקודה D יתקבלו מפתרון מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} y=-2x-4 \\ y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad D(-1,-2) \end{cases}$$

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

(ב) שטח מקבילית שווה למכפלת צלע בגובה לאותה צלע, כלומר:

$S_{\text{מקבילית}} = \mathrm{AH} \cdot \mathrm{DC}$

H היא נקודת החיתוך של הישרים AH ו- DC, שמשוואותיהן ידועות לנו.

מכאן נמצא: $\mathrm{H}(-1.6,-2.2)$.

נחשב את אורכי AH ו- DC ונקבל:

$S_{\text{מקבילית}} = \sqrt{19.6} \cdot \sqrt{90} =$ 42 יחידות שטח

**(3)** (א) נסמן ב- p את ההסתברות שמכתב בשפה האנגלית יהיה נגוע בווירוס.

נתון: $3p = 1 - p$, מכאן: $p = 0.25$.

$\mathrm{P}(\text{לפחות מכתב אחד יהיה נגוע בווירוס}) =$

$= 1 - \mathrm{P}(\text{אף אחד מ - 5 המכתבים לא יהיה נגוע בווירוס}) =$

$= 1 - 0.75^5 = 0.7627$

(ב) $\mathrm{P}_5(2) = \binom{5}{2} \cdot 0.25^2 \cdot 0.75^3 = 0.2637$

(ג) נסמן מאורעות:

A – המכתב נגוע בווירוס.

$\bar{\mathrm{A}}$ – המכתב אינו נגוע בווירוס.

B – המכתב הוא דואר זבל.

$\bar{\mathrm{B}}$ – המכתב אינו דואר זבל.

נתון: $\mathrm{P}(\mathrm{A}/\bar{\mathrm{B}}) = 0.1$ , $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0.8$ , $\mathrm{P}(\bar{\mathrm{B}}) = 0.2$

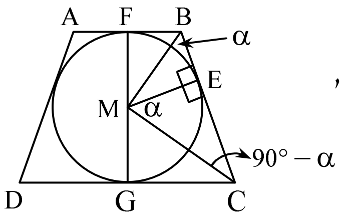
$$\mathrm{P}(\mathrm{A}/\bar{\mathrm{B}}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\bar{\mathrm{B}})}{\mathrm{P}(\bar{\mathrm{B}})} \Rightarrow 0.1 = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\bar{\mathrm{B}})}{0.2} \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\bar{\mathrm{B}}) = 0.02$$

ניעזר בטבלה דו-ממדית, נשלים את שאר ההסתברויות ונקבל:

| | A | $\bar{\mathrm{A}}$ | סה"כ |
|---|---|---|---|
| **B** | 0.23 | 0.57 | 0.8 |
| **$\bar{\mathrm{B}}$** | 0.02 | 0.18 | 0.2 |
| **סה"כ** | 0.25 | 0.75 | 1 |

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \frac{0.23}{0.8} = 0.2875$$

**(4)** (א) יש להראות ש- $\Delta BEM \sim \Delta MEC$ .

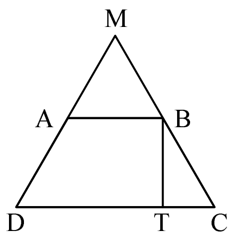



נסמן: $\measuredangle EBM = \alpha$ ואז גם $\measuredangle FBM = \alpha$ ,
כי $\Delta BFM \cong \Delta BEM$ לפי צ.צ.צ .
מכאן: $\measuredangle C = 180° - 2\alpha$ , כי סכום זוויות
חד-צדדיות בין ישרים מקבילים הוא $180°$ .
מכיוון ש- $\measuredangle ECM = \measuredangle GCM$ (המשולשים $MGC$ ו- $MEC$
חופפים לפי צ.צ.צ.), הרי ש- $\measuredangle ECM = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha$ .
כמו כן, $\measuredangle BEM = \measuredangle CEM = 90°$ (זווית בין משיק לרדיוס בקצהו
שווה ל- $90°$) ואז $\measuredangle EMC = \alpha$ (סכום הזוויות במשולש $EMC$
הוא $180°$). מכאן נקבל ש- $\Delta BEM \sim \Delta MEC$ לפי ז.ז. , כלומר:

$$\frac{BE}{ME} = \frac{BM}{MC} = \frac{EM}{EC} \Rightarrow ME^2 = BE \cdot EC$$

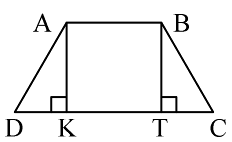
(ב) $ME$ הוא רדיוס במעגל, לכן $ME = R$ .
$BF = BE$ , $CG = CE$ , כי אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים
שני משיקים למעגל, אז הם שווים.
ניעזר בסעיף (א) שבו הוכחנו כי $ME^2 = BE \cdot EC$ ,
נציב ונקבל: $R^2 = BF \cdot CG$ .

**(5)** $BT \perp DC$ , $AD = BC$ , $AB \parallel DC$




$BT = AB = \frac{1}{3} DC$

בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ ( $AD = BC$ , $AB \parallel DC$ )
לפי לֶמה (Lemma): $BT \perp DC \Leftarrow TC = \frac{DC - AB}{2}$




הוכחה: נעביר $AK \perp DC$
$AK = BT$ , $AD = BC$ , $\measuredangle K = \measuredangle T$

$\Downarrow$

$\Delta ADK \cong \Delta BCT$ לפי משפט חפיפה צ.צ. זווית מול הצלע הגדולה.

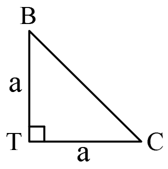
$AB = KT \Rightarrow DK + TC = DC - AB$

לכן

$$DK = TC = \frac{DC - AB}{2} = \frac{3a - a}{2}$$

*המשך בעמוד הבא* ▸▸▸

(א) $\measuredangle C = ?$




נסמן: $AB = BT = a$ , אז $DC = 3a$

לפי לֶמה ( Lemma ) :

$$TC = \frac{DC - AB}{2} = \frac{3a - a}{2} = a$$

נתבונן ב- $\Delta BCT$ :

$$BT = CT = a$$

$$\measuredangle T = 90°$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle TCB = \measuredangle CBT = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$$

(ב) $a = ?$ , $S_{\Delta DBC} = 150$ סמ"ר

$$S_{\Delta DBC} = \frac{DB \cdot BT}{2}$$

$$150 = \frac{3a \cdot a}{2} \quad \Rightarrow \quad a^2 = 100$$

$$\begin{cases} a = \pm 10 \\ a > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = 10$$

$AB = a = 10$ ס"מ , $DC = 3a = 30$ ס"מ

לפי משפט פיתגורס ב- $\Delta BTC$ :

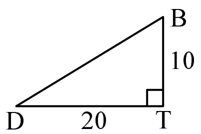
$$BC^2 = BT^2 + TC^2$$

$$BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = 2 \cdot 10^2 = 200$$

$BC = 10\sqrt{2}$ ס"מ $= AD$

מ.ש.ל. (ב)

(ג) נתבונן ב- $\Delta DBT$ :

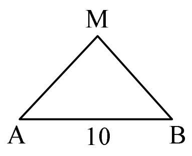



$DT = DC - TC = 3a - a = 2a = 20$ ס"מ

$$\tan\measuredangle D = \frac{BT}{DT} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\measuredangle BDT \approx 26.56°$$

(ד) נתבונן ב- $\Delta ABM$ :




$$\measuredangle MAB = \measuredangle ADC = \measuredangle BCD = \measuredangle MBA = 45°$$

$$\measuredangle AMB = 180° - 45° - 45° = 90°$$

$$\measuredangle MAB = \measuredangle MBA$$

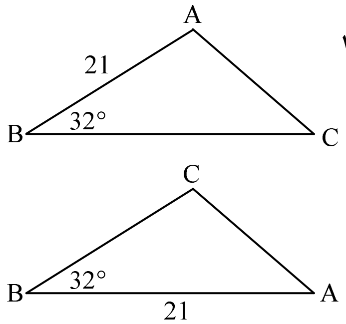
$$\Downarrow$$

$AM = BM$ מול זוויות שוות

מונחות צלעות שוות.

$AB^2 = AM^2 + MB^2 \quad \Rightarrow \quad 10^2 = AM^2 + AM^2$ לפי משפט פיתגורס.

$2AM^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad AM^2 = 50 \quad \Rightarrow \quad AM = 5\sqrt{2}$ ס"מ




**(6)** משמאל נתונות שתי האפשרויות לסרטוט המשולש

הנתון $ABC$ . נתון: $AB =$ 21 ס״מ

$\measuredangle ABC = 32°$ , $D = 2R =$ 25 ס״מ

לפי משפט הסינוסים: $\frac{AB}{\sin\measuredangle C} = 2R = D$

$\frac{AB}{\sin\measuredangle C} = 25 \;\Rightarrow\; \sin\measuredangle C = \frac{AB}{25} = \frac{21}{25}$

אפשרות $(i)$:

$\measuredangle C = 57.14°$ , $\measuredangle B = 32°$ , $\measuredangle A = 180° - 57.14° - 32° = 90.86°$

אפשרות $(ii)$: $\measuredangle C = 180° - 57.14° = 122.86°$ , $\measuredangle B = 32°$

$\measuredangle A = 180° - 122.86° - 32° = 25.14°$

לפי משפט הסינוסים:

$\frac{AC}{\sin\measuredangle B} = 2R = D \;\Rightarrow\; \frac{AC}{\sin 32°} = 25 \;\Rightarrow\; AC =$ 13.25 ס״מ

אפשרות $(i)$: $\measuredangle A = 93.86°$

$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot \sin\measuredangle A = \frac{21 \cdot 13.25}{2} \cdot \sin 90.86° =$ 139.1 סמ״ר

אפשרות $(ii)$: $\measuredangle A = 25.14°$

$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot \sin\measuredangle A = \frac{21 \cdot 13.25}{2} \cdot \sin 25.14° =$ 59.1 סמ״ר

**(7)** $f(x) = \frac{x^2 + ax}{x^2 + 3}$

תחום ההגדרה: כל $x$ . לגרף הפונקציה אין אסימפטוטות אנכיות.

(א) משוואת האסימפטוטה האופקית $y = 1$ , כי: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

אם גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית כאשר $x = 1$ ,

אז מתקיים: $f(1) = 1$ . נציב $x = 1$ בפונקציה ונקבל:

$\frac{1^2 + a \cdot 1}{1^2 + 3} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{1 + a}{4} = 1 \;\Rightarrow\; a = 3$

$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 3}$

*המשך בעמוד הבא* ➤➤➤

(ב) נגזור את הפונקציה:
$$f'(x)=\frac{(2x+3)(x^2+3)-2x(x^2+3x)}{(x^2+3)^2}=$$
$$=\frac{2x^3+6x+3x^2+9-2x^3-6x^2}{(x^2+3)^2}=\frac{-3x^2+6x+9}{(x^2+3)^2}=$$
$$=\frac{-3\,(x^2-2x-3)}{(x^2+3)^2}=\frac{-3\,(x-3)(x+1)}{(x^2+3)^2}$$

נשווה את הנגזרת לאפס:
$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{-3\,(x-3)(x+1)}{(x^2+3)^2}=0$$

נקבל:
$$x_1=3\ ,\ y_1=\tfrac{3}{2}\qquad ,\qquad x_2=-1\ ,\ y_2=-\tfrac{1}{2}$$

כלומר הנקודות החשודות לקיצון: $(3,1.5)$ , $(-1,-0.5)$ .

מכיוון שהמכנה חיובי, הרי שבנקודות החשודות לקיצון הסימן של $f''$ הוא כמו הסימן של הנגזרת של המונה של הנגזרת הראשונה.

נסמן: $\mathrm{A}(x)=-3x^2+6x+9$

ואז: $\mathrm{A}'(x)=-6x+6$

$$\mathrm{A}'(3)=-18+6<0 \;\Rightarrow\; \max(3,1.5)$$
$$\mathrm{A}'(-1)=6+6>0 \;\Rightarrow\; \min(-1,-0.5)$$

**דרך נוספת:**

נבדוק את התנהגות פונקציית הנגזרת.

המכנה של $f'(x)$ הוא חיובי, לכן הסימן של פונקציית הנגזרת נקבע לפי המונה של $f'(x)$ .

גרף המונה הוא פרבולה הפוכה החותכת את ציר ה- $x$ בנקודות: $x=-1$ , $x=3$ . לפי תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f'(x)$ נקבע את המינימום והמקסימום של הפונקציה $f(x)$ .

| x | $x<-1$ | $x=-1$ | $-1<x<3$ | $x=3$ | $x>3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | + | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | min | ↗ | max | ↘ |

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ג) שיעורי נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ :

$$x=0 \ \Rightarrow \ y=\frac{0+0}{0+3}=0 \ \Rightarrow \ (0,0)$$

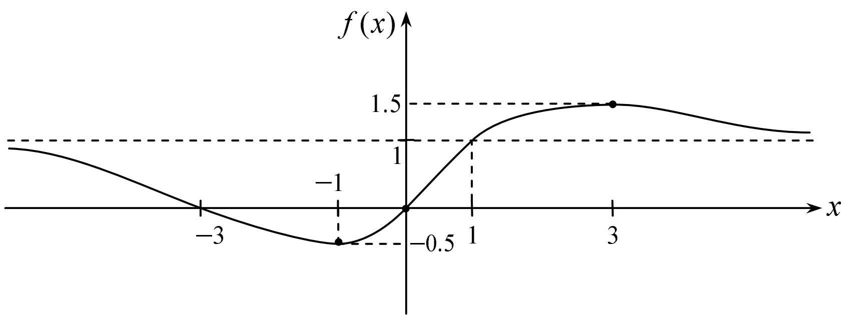
שיעורי נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ :

$$y=0 \ \Rightarrow \ 0=\frac{x^2+3x}{x^2+3}$$

$$x^2+3x=0 \ \Rightarrow \ x(x+3)=0 \ \Rightarrow \ x_1=0 \ , \ x_2=-3$$

שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- $x$ הם : $(-3,0)$ , $(0,0)$ .

(ד)




(ה) נתון : $g'(x)=f(x)$ .

הפונקציה $g(x)$ עולה כאשר $g'(x)>0$ , כלומר, כאשר $f(x)>0$ .

ולכן, תחומי העלייה הם $x>0$ , $x<-3$ .

הפונקציה $g(x)$ יורדת כאשר $g'(x)<0$ , כלומר, כאשר $f(x)<0$ .

ולכן, תחום הירידה $-3<x<0$ .

**(8)** נתון :

$$f(x)=\sqrt{\mathrm{a}\,x-x^2} \ , \ f'(2)=0$$

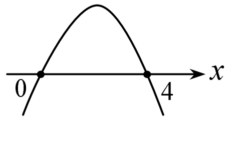
(א)

$$f'(x)=\frac{\mathrm{a}-2x}{2\sqrt{\mathrm{a}\,x-x^2}} \ , \ f'(2)=\frac{\mathrm{a}-4}{2\sqrt{2\mathrm{a}-4}}=0$$

$$\mathrm{a}-4=0 \ \Rightarrow \ \mathrm{a}=4 \ , \ f(x)=\sqrt{4x-x^2}$$

(ב) תחום ההגדרה של הפונקציה : $4x-x^2\geq 0$

$0\leq x\leq 4$




המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ג) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ :

$x=0 \ , \ y=0 \Rightarrow (0,0)$

מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ : $y=0$

$\sqrt{4x-x^2}=0 \ \Rightarrow \ 4x-x^2=0 \ \Rightarrow \ x_1=0 \ , \ x_2=4$

שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- $x$ : $(0,0) \ , \ (4,0)$

(ד) $f'(x)=\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} \ , \ f'(x)=0$

$\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}=0 \ \Rightarrow \ 4-2x=0 \ \Rightarrow \ x=2 \ , \ y=2$

נקודות חשודות לקיצון (כולל נקודות קצה) : $(0,0) \ , \ (2,2) \ , \ (4,0)$

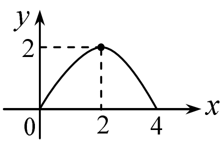
הפונקציה רציפה, לכן נקודת מקסימום מקומי ומוחלט $(2,2)$ ,

נקודות מינימום מקומי ומוחלט $(4,0) \ , \ (0,0)$ .

(ה) תחום העלייה של הפונקציה הוא $0 \le x < 2$ .

תחומי הירידה של הפונקציה הוא $2 < x \le 4$ .

(ו) ראו סרטוט משמאל.




**(9)** נגזרת הפונקציה $g(x)$ היא: $g'(x)=-6x+8$

נתון כי שיעורי אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$

עם ציר ה- $x$ הם : $(2,0)$ .

(א) נמצא את הפונקציה $g(x)$ :

$g(x)=\int g'(x)dx=\int(-6x+8)dx=-3x^2+8x+\mathrm{c}$

נציב את שיעורי הנקודה הנתונה: $-3(2)^2+8\cdot 2+\mathrm{c}=0$

$-12+16+\mathrm{c}=0 \ \Rightarrow \ \mathrm{c}=-4$

$g(x)=-3x^2+8x-4$

נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ : $y=0 \ \Rightarrow \ g(x)=0$

$-3x^2+8x-4=0 \ \Rightarrow \ 3x^2-8x+4=0$

*המשך בעמוד הבא* ➤➤➤

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{6}=\frac{8\pm 4}{6}\quad\Rightarrow\quad x_1=2\ ,\ x_2=\frac{2}{3}$$

$(2,0)$ היא הנקודה הנתונה,

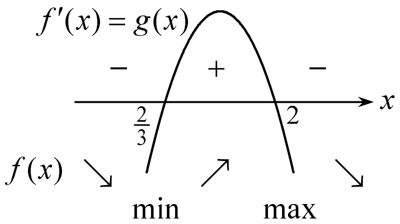
לכן שיעורי נקודת החיתוך השנייה הם $\left(\frac{2}{3},0\right)$.

ב) $f'(x)=g(x)$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int g(x)\,dx=\int(-3x^2+8x-4)\,dx=$$

$$=-x^3+4x^2-4x+\mathrm{c}$$

נסרטט את הגרף של $f'(x)=g(x)$ :




בנקודת המקסימום של $f(x)$ מתקיים: $x=2$ .

לפי הנתון, שיעור ה- $y$ בנקודת המקסימום הוא $0$ ,

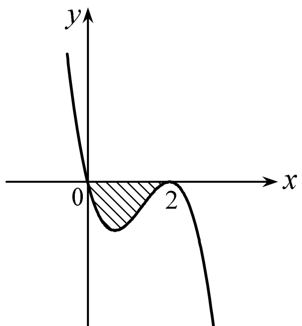
לכן מתקיים: $f(2)=0$ .

$$f(2)=0\ \Rightarrow\ -2^3+4\cdot 2^2-4\cdot 2+\mathrm{c}=0$$

$$-8+16-8+\mathrm{c}=0\ \Rightarrow\ \mathrm{c}=0$$

$$f(x)=-x^3+4x^2-4x=-x(x-2)^2$$

ג) תחום ההגדרה של $f(x)$ : כל $x$ .




שיעורי נקודות חיתוך עם הצירים:

$$x=0\ ,\ 2\ \Rightarrow\ (0,0)\ ,\ (2,0)$$

שיעורי נקודות הקיצון:

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ g(x)=0$$

$$x=2\ \Rightarrow\ y=0$$

$$x=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ y=-\frac{32}{27}$$

$$\mathrm{S}=-\int_0^2 f(x)\,dx=-\int_0^2(-x^3+4x^2-4x)\,dx=$$

$$=-\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{4}{3}x^3-2x^2\right)\Big|_0^2=-\left(-4+\frac{32}{3}-8-0\right)=1\tfrac{1}{3}\ \text{יחידות שטח}$$