פתרון מבחן מס' 4 (ספר לימוד – שאלון 035804)

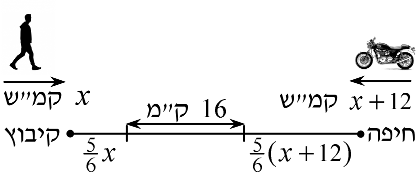
09-05-2017

(1) נסמן ב- x קמ"ש את מהירות הולך הרגל.

לכן, מהירות הקטנוע היא $x+12$ קמ"ש.

נסמן את המרחק בין הקיבוץ לחיפה

ב- S ק"מ. במשך 50 דקות $= \frac{5}{6}$ שעה,



הולך הרגל עבר מרחק של $\frac{5}{6}x$ ק"מ, ורוכב הקטנוע עבר מרחק

של $\frac{5}{6}(x+12)$ ק"מ. לכן, (ראו תרשים): $\quad ① \; S=\frac{5}{6}x+16+\frac{5}{6}(x+12)$

זמן הפגישה $=$ t שעות אחרי היציאה.

עד הפגישה הולך הרגל עבר מרחק של tx ק"מ,

ורוכב הקטנוע עבר $t(x+12)$ ק"מ. לכן: $\quad ② \; S=tx+t(x+12)$

המרחק מהקיבוץ עד נקודת הפגישה שווה למרחק שעבר הולך הרגל

עד לפגישה $= tx$ ק"מ. מרחק זה רוכב הקטנוע עובר ב- $\frac{1}{2}$ שעה $= 30$ דקות.

כלומר: $\quad ③ \; \frac{1}{2}(x+12)=tx \;\Rightarrow\; t=\frac{x+12}{2x}$

נציב במשוואה ②: $\quad ④ \; S=t\cdot(x+x+12)=\frac{x+12}{2x}(2x+12)$

נשווה בין הביטויים במשוואות ① ו- ④ ונקבל:

$$\frac{x+12}{2x}(2x+12)=\frac{5}{6}x+16+\frac{5}{6}(x+12) \quad / \cdot 6x$$

$$3(x+12)(2x+12)=5x^2+96x+5x(x+12)$$

$$3(2x^2+12x+24x+144)=5x^2+96x+5x^2+60x$$

$$6x^2+108x+432=10x^2+156x \;\Rightarrow\; 4x^2+48x-432=0 \quad /:4$$

$$x^2+12x-108=0$$

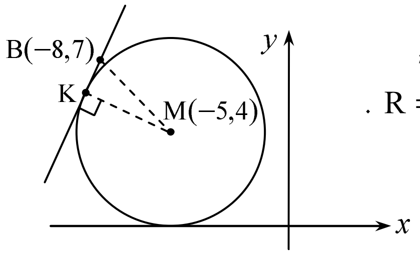
$$x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{144+432}}{2}=\frac{-12\pm 24}{2} \;\Rightarrow\; x_1=6 \;,\; x_2=-18$$

הפתרון השני $x_2=-18$ נפסל מכיוון שמהירות הולך הרגל הינה גודל חיובי.

לכן, מהירות הולך הרגל היא 6 קמ"ש.

המרחק בין הקיבוץ לחיפה: $\quad S=\frac{5}{6}\cdot 6+16+\frac{5}{6}(6+12)=$ 36 ק"מ

(2) (א) המעגל משיק לציר ה- x (ראו סרטוט),



לכן, 4 יחידות אורך $= \left|4\right| = \left|y_{\mathrm{M}}\right| = \mathrm{R}$.

משוואת המעגל הנתון היא :

$$(x+5)^2+(x-4)^2=16$$

(ב) $$\mathrm{MB}=\sqrt{(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{M}})^2+(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{M}})^2}=\sqrt{(-8+5)^2+(7-4)^2}$$

$\mathrm{MB}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=$ יחידות אורך $3\sqrt{2}$

$$3\sqrt{2}\approx 4.24>\mathrm{R}=4$$

כלומר הנקודה B נמצאת מחוץ למעגל.

(ג) נקודה K נקודת השקה (ראו סרטוט).

המשיק למעגל BK מאונך לרדיוס MK בנקודת ההשקה K .

לפי משפט פיתגורס ב- $\Delta\mathrm{MBK}$: $\mathrm{BK}^2=\mathrm{BM}^2-\mathrm{MK}^2$

$\mathrm{BK}^2=18-16=2 \;\Rightarrow\; \mathrm{BK}=$ יחידות אורך $\sqrt{2}$

(3) נגדיר מאורעות :

A – נחקר דובר אמת.

$\bar{\mathrm{A}}$ – נחקר משקר.

B – המכונה קבעה שהנחקר דובר אמת.

$\bar{\mathrm{B}}$ – המכונה קבעה שהנחקר משקר.

נתון : $\mathrm{P}(\bar{\mathrm{B}}/\bar{\mathrm{A}})=0.9$, $\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A})=0.95$,

$\mathrm{P}(\mathrm{A})=0.6 \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}})=1-0.6=0.4$

ניעזר בנוסחה של ההסתברות המותנית :

$$\mathrm{P}(\bar{\mathrm{B}}/\bar{\mathrm{A}})=\frac{\mathrm{P}(\bar{\mathrm{B}}\cap\bar{\mathrm{A}})}{\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}})} \;\Rightarrow\; 0.9=\frac{\mathrm{P}(\bar{\mathrm{B}}\cap\bar{\mathrm{A}})}{0.4} \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(\bar{\mathrm{B}}\cap\bar{\mathrm{A}})=0.36$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} \;\Rightarrow\; 0.95=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})}{0.6} \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})=0.57$$

ניעזר בטבלה דו-ממדית ונעלה את כל מה שמצאנו :

	A	$\bar{\mathrm{A}}$	**סה"כ**
B	0.57		
$\bar{\mathrm{B}}$		0.36	
סה"כ	0.6	0.4	1

המשך בעמוד הבא >>>

כעת ניתן להשלים את שאר ההסתברויות בטבלה על-ידי סכום / הפרש

הסתברויות :

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.4 - 0.36 = 0.04$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.57 = 0.03$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0.57 + 0.04 = 0.61$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.61 = 0.39$$

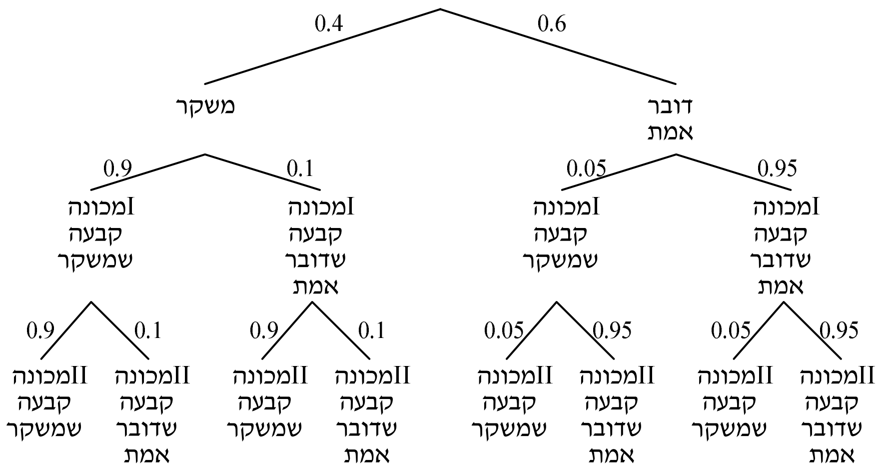
וכך נקבל :

	A	**$\bar{A}$**	**סה"כ**
B	0.57	0.04	0.61
$\bar{B}$	0.03	0.36	0.39
סה"כ	0.6	0.4	1

(א)

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.57}{0.61} = \frac{57}{61}$$

(ב) ניעזר בדיאגרמת עץ :



$$P = P(\text{שתי המכונות קבעו שהוא דובר אמת / אדם דובר אמת}) =$$

$$= \frac{P(\text{מכונה II קבעה דובר אמת} \cap \text{מכונה I קבעה דובר אמת} \cap \text{אדם דובר אמת})}{P(\text{מכונה II קבעה דובר אמת} \cap \text{מכונה I קבעה דובר אמת})}$$

בעזרת העץ נקבל :

$$P = \frac{0.6 \cdot 0.95 \cdot 0.95}{0.6 \cdot 0.95 \cdot 0.95 + 0.4 \cdot 0.1 \cdot 0.1} = \frac{0.5415}{0.5455} = \frac{1{,}083}{1{,}091}$$

(4) (א) נתבונן ב- $\Delta\,\mathrm{AOB}$ ו- $\Delta\,\mathrm{COD}$:

$\mathrm{AB} \parallel \mathrm{DC}$ (נתון)

$\measuredangle\mathrm{BAO} = \measuredangle\mathrm{OCD}$ (זוויות מתחלפות בין מקבילים שוות זו לזו)

$\measuredangle\mathrm{ABO} = \measuredangle\mathrm{ODC}$ (זוויות מתחלפות בין מקבילים שוות זו לזו)

$\Downarrow$

$\Delta\,\mathrm{ABO} \sim \Delta\,\mathrm{COD}$ (לפי משפט דמיון ז.ז.)

נתבונן ב- $\Delta\,\mathrm{COD}$ ו- $\Delta\,\mathrm{CAE}$:

$\mathrm{AE} \parallel \mathrm{OD}$ (נתון)

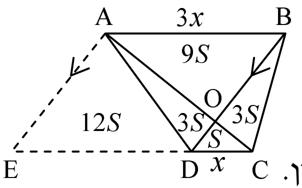
$\measuredangle\mathrm{DOC} = \measuredangle\mathrm{EAC}$ (זוויות מתאימות בין מקבילים שוות זו לזו)

$\measuredangle\mathrm{OCD} = \measuredangle\mathrm{ACE}$ (כל גודל שווה לעצמו)

$\Downarrow$

$\Delta\,\mathrm{COD} \sim \Delta\,\mathrm{CAE}$ (לפי משפט דמיון ז.ז.)

(ב) נתון: $S_{\Delta\,\mathrm{DOC}} = S$.



נסמן $\mathrm{DC} = x$, ואז $\mathrm{AB} = 3x$.

שטח משולש AOB הוא $9S$, כי יחס שטחי משולשים דומים הוא כמו ריבוע יחס הדמיון.

שטחי המשולשים BOC ו- AOD הם $3S$, מכיוון שאם נסתכל למשל על המשולשים DOC ו- AOD :

$$S_{\Delta\,\mathrm{DOC}} = \frac{\mathrm{OC} \cdot \text{גובה מ- D ל- OC}}{2} \quad , \quad S_{\Delta\,\mathrm{AOD}} = \frac{\mathrm{AO} \cdot \text{גובה מ- D ל- AO}}{2}$$

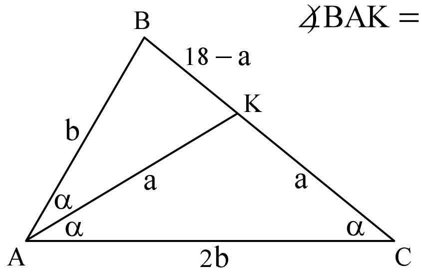
אך מכיוון ש- $\mathrm{AO} = 3 \cdot \mathrm{OC}$ והגובה מ- D לצלעות OC ו- AO הוא אותו גובה, הרי שנובע שגם השטח של AOD הוא פי 3 משטח DOC , כלומר $3S$.

ABDE הוא מקבילית (2 זוגות של צלעות נגדיות מקבילות),

לכן המשולשים ABD ו- ADE חופפים.

$S_{\Delta\,\mathrm{ABD}} = 9S + 3S = 12S$, לכן גם $S_{\Delta\,\mathrm{AED}} = 12S$.

ובסך הכול: $S_{\mathrm{ABCE}} = S + 9S + 3S + 3S + 12S = 28S$



(5) 18 ס"מ $= BC$, $AC = 2 \cdot AB$, $\measuredangle BAK = \measuredangle KAC$

$\measuredangle BAC = 2 \cdot \measuredangle BCA$

נסמן: $\measuredangle BCA = \alpha$

אז: $\measuredangle BAC = 2\alpha$

$\Downarrow$

$\measuredangle KAC = \measuredangle KCA = \alpha$

$\Downarrow$

$AK = KC$ מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.

נסמן: $AK = KC = a$

$AB = b$

אז: $AC = 2b$

(א) צ"ל: $\Delta ABK \sim \Delta CBA$

$\measuredangle ABK = \measuredangle ABK$ כל גודל שווה לעצמו.

$\measuredangle BAK = \measuredangle ACB = \alpha$

$\Delta ABK \sim \Delta CBA$ לפי משפט דמיון ז.ז. מ.ש.ל. (א).

(ב) $BK = ?\ ,\ KC = a = ?$

$BK = BC - KC = 18 - a$ חיסור קטעים.

AK חוצה-זווית A ב- ΔABC , לכן, לפי משפט חוצה-זווית:

$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} \quad \Rightarrow \quad \frac{18-a}{a} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$$

$36 - 2a = a \quad \Rightarrow \quad a = CK =$ 12 ס"מ

$BK = 18 - 12 =$ 6 ס"מ

מ.ש.ל. (ב).

(ג) + (ד)

$AC = 2b = ?\ ,\ AB = b = ?$

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔACK :

$$AC^2 = AK^2 + KC^2 - 2 \cdot AK \cdot KC \cdot \cos\measuredangle AKC$$

$$4b^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos\measuredangle AKC$$

$$4b^2 = 288 - 288 \cdot \cos\measuredangle AKC \quad (1)$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔABK :

$$AB^2 = BK^2 + KA^2 - 2 \cdot BK \cdot KA \cdot \cos\measuredangle BKA$$
$$b^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos(180° - \measuredangle AKC)$$
$$b^2 = 180 + 144 \cdot \cos\measuredangle AKC \quad (2)$$

נפתור את מערכת המשוואות (1) ו- (2) :

$$\begin{cases} 4b^2 = 288 - 288 \cdot \cos\measuredangle AKC \\ b^2 = 180 + 144 \cdot \cos\measuredangle AKC \quad / \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b^2 = 288 - 288 \cdot \cos\measuredangle AKC \\ 2b^2 = 360 + 288 \cdot \cos\measuredangle AKC \end{cases}$$

$$6b^2 = 648 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 108$$
$b > 0 \quad \Rightarrow \quad b \approx$ 10.39 ס״מ $\quad \Rightarrow \quad AB =$ 10.39 ס״מ

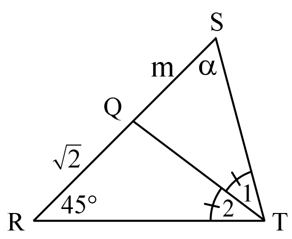
$\Rightarrow \quad AC =$ 20.78 ס״מ

נציב את הערך שלך b במשוואה (2) ונקבל :

$$108 = 180 + 144\cos\measuredangle AKC \quad \Rightarrow \quad 144\cos\measuredangle AKC = -72$$
$$\measuredangle AKC = \pm 120° + 360°k$$

לפי משמעות השאלה : $\measuredangle AKC = 120°$

(6) נסמן את הנתונים על גבי הסרטוט.



לפי הנתון, נסמן : $\measuredangle T_1 = \measuredangle T_2$

$RQ = \sqrt{2}$, $QS = m$

. $\measuredangle TRQ = 45°$, $\measuredangle RST = \alpha$

(א) לפי משפט הסינוסים ב- ΔSQT :

$$\frac{SQ}{\sin\measuredangle T_1} = \frac{TQ}{\sin\measuredangle S} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{\sin\measuredangle T_1} = \frac{TQ}{\sin\alpha}$$

$$TQ \cdot \sin\measuredangle T_1 = m \cdot \sin\alpha \qquad (1)$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔRQT :

$$\frac{QR}{\sin\measuredangle T_2} = \frac{QT}{\sin\measuredangle R} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{\sin\measuredangle T_2} = \frac{QT}{\sin 45°}$$

המשך בעמוד הבא ⮜⮜⮜

(2) $$\mathrm{QT}\cdot\sin\measuredangle\mathrm{T}_2=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$$

במשוואות (1) ו- (2) שקבלנו, הביטויים באגפים השמאליים שווים זה לזה (כי $\measuredangle\mathrm{T}_1=\measuredangle\mathrm{T}_2$), לכן נשווה בין הביטויים באגפים הימניים ונקבל:

$$\mathrm{m}\cdot\sin\alpha=1\ \Rightarrow\ \sin\alpha=\frac{1}{\mathrm{m}}$$

(ב) נתון: $\mathrm{m}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

נציב בביטוי שקיבלנו בסעיף (א) ונקבל:

$$\sin\alpha=\frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

למשוואה שני פתרונות: $\alpha=60^\circ$ או $\alpha=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

לכן זוויות המשולש RST הן:

אפשרות I : $\measuredangle\mathrm{S}=60^\circ\ ,\ \measuredangle\mathrm{R}=45^\circ\ ,\ \measuredangle\mathrm{T}=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ$

אפשרות II : $\measuredangle\mathrm{S}=120^\circ\ ,\ \measuredangle\mathrm{R}=45^\circ\ ,\ \measuredangle\mathrm{T}=180^\circ-120^\circ-45^\circ=15^\circ$

(7) (א) תחום ההגדרה: $x\neq 0$

$$f(x)=\frac{4-x^3}{2x^2}=\frac{2}{x^2}-\frac{x}{2}$$

(ב) $$f'(x)=\left(\frac{2}{x^2}-\frac{x}{2}\right)'=-\frac{4}{x^3}-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ f'(x)=0\ \Rightarrow\ -\frac{4}{x^3}-\frac{1}{2}=0$$

$$x^3=-8\ \Rightarrow\ x=-2\ \Rightarrow\ f(-2)=\frac{4+8}{8}=\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ (-2,1.5)$$

$$f''(x)=\left(-\frac{4}{x^3}-\frac{1}{2}\right)'=\frac{12}{x^4}>0\ \Rightarrow\ \min(-2,1.5)$$

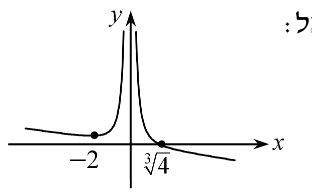
(ג) + (ד)

נחשב את שיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

$$y=0\ \Rightarrow\ \frac{4-x^3}{2x^2}=0\ \Rightarrow\ 4-x^3=0\ \Rightarrow\ x=\sqrt[3]{4}$$

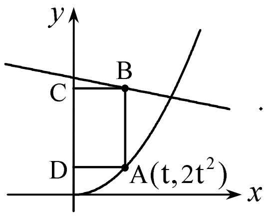
לסרטוט הסקיצה ניעזר גם בכך ש- $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^\pm}f(x)=\infty$, ונקבל את הסקיצה משמאל:



תחומי ירידה: $x<-2\ ,\ x>0$

תחום עלייה: $-2<x<0$



(8) הפונקציות הנתונות:

$y=2x^2$ – פונקציה ריבועית שהגרף שלה פרבולה ישרה.

$y=12-0.2x$ – משוואת ישר יורד.

(א) נקודה A נמצאת על הפרבולה.

נסמן: $x_A=t$ ואז:

$$x_A=t \;\Rightarrow\; y_A=2t^2 \;\Rightarrow\; A(t,2t^2)$$

נקודה B נמצאת על הישר, לכן:

$$x_B=x_A=t \;\Rightarrow\; y_B=12-0.2t \;\Rightarrow\; B(t,12-0.2t)$$

(ב)

$$x_D=0\;,\; y_D=y_A=2t^2 \;\Rightarrow\; D(0,2t^2)$$

$$x_C=0\;,\; y_C=y_B=12-0.2t \;\Rightarrow\; C(0,12-0.2t)$$

$$f(t)=P_{ABCD}=2(AD+AB)=2[(x_A-x_D)+(y_B-y_A)]=$$
$$=2[(t-0)+(12-0.2t-2t^2)]=2(-2t^2+0.8t+12)$$

$$f'(t)=2(-4t+0.8)$$

$$f'(t)=0 \;\Rightarrow\; -4t+0.8=0 \;\Rightarrow\; t=0.2$$

$$f''(t)=2\cdot(-4)<0 \;\Rightarrow\; \max$$

(ג) עבור $t=0.2$:

$AD=t=$ 0.2 יחידות אורך

$AB=y_B-y_A=12-0.2t-2t^2=$ 11.88 יחידות אורך

שטח המלבן בעל היקף מקסימלי עבור $t=0.2$:

$S_{ABCD}=11.88\cdot 0.2=$ 2.376 יחידות שטח

(9) נתון: $f'(x) = \mathrm{b} - \left(\frac{2\sqrt{2}}{x}\right)^2 \ , \ f'(1) = -4 \ , \ f(4) = 10$

$f'(1) = -4 \ \Rightarrow \ \mathrm{b} - \frac{8}{1^2} = -4 \ \Rightarrow \ \mathrm{b} = 4 \ \Rightarrow \ f'(x) = 4 - \frac{8}{x^2}$

$f(x) = \int f'(x)dx = \int \left(4 - \frac{8}{x^2}\right)dx = 4x + \frac{8}{x} + \mathrm{c}$

$f(4) = 10 \ \Rightarrow \ 4 \cdot 4 + \frac{8}{4} + \mathrm{c} = 10 \ \Rightarrow \ \mathrm{c} = -8$

$f(x) = 4x + \frac{8}{x} - 8$

שיעור ה- y בנקודה שבה $x = 1$: $f(1) = 4 \cdot 1 + \frac{8}{1} - 8 = 4$

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה זו נתון: $\mathrm{m}_{\text{משיק}} = f'(1) = -4$

משוואת המשיק בנקודה $(1,4)$: $y - 4 = -4(x-1) \ \Rightarrow \ y = -4x + 8$

גבי יקואל