פתרון מבחן מס' 3 (ספר לימוד – שאלון 035804)

09-05-2017

(1) נסמן את סכום הקנייה של המניה הראשונה ב- x ש"ח.

נבטא את סכום הקנייה של המניה השנייה ב- $(7,000-x)$ ש"ח.

כעבור שנה מחיר המניה הראשונה הוא: $\frac{100+12}{100}\cdot x =$ ש"ח $1.12x$

ומחיר המניה השנייה הוא: $\frac{100+8}{100}\cdot(7,000-x) =$ ש"ח $1.08(7,000-x)$

לאחר מכירת המניה השנייה והשקעת כל הסכום במניה הראשונה, ערך השקעה בתחילת השנה השנייה:

$$1.12x+1.08(7,000-x)=1.12x+7,560-1.08x=0.04x+7,560$$

כעבור שנה נוספת ערך המניה הראשונה עלה ב- 15%, כלומר, כעת ערכה:

$$\frac{100+15}{100}\cdot(0.04x+7,560)=1.15(0.04x+7,560)$$

לפי נתוני השאלה: $1.15(0.04x+7,560)=8,832 \quad / :1.15$

$$0.04x+7,560=7,680 \;\Rightarrow\; 0.04x=120 \;\Rightarrow\; x=3,000$$

תשובה: האדם קנה את המניה הראשונה ב- 3,000 ש"ח

ואת המניה השנייה ב- 4,000 ש"ח.

(2) (א) משוואת BC היא $x+3y+19=0$,

לכן: $3y=-x-19$

$$y=-\frac{1}{3}x-\frac{19}{3} \;\Rightarrow\; m_{BC}=-\frac{1}{3}$$

$AD \perp BC$, לכן $m_{AD}\cdot m_{BC}=-1$

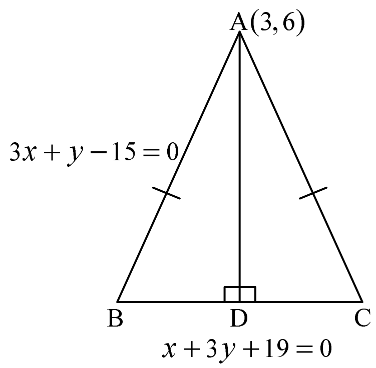
(מכפלת שיפועי ישרים מאונכים שווה ל- -1):

$$m_{AD}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1 \;\Rightarrow\; m_{AD}=3$$

נמצא את משוואת הגובה AD

($A(3,6)$, $m=3$):

$$y-6=3(x-3) \;\Rightarrow\; y=3x-3$$



המשך בעמוד הבא ➤➤➤

(ב) את שיעורי הנקודה B נמצא מפתרון מערכת המשוואות:

$$-\begin{cases} x+3y+19=0 \\ 3x+y-15=0 \quad / \cdot 3 \end{cases}$$

$$-8x+64=0 \quad \Rightarrow \quad 8x=64 \quad \Rightarrow \quad x=8$$

$$3\cdot 8+y-15=0 \quad \Rightarrow \quad y=-9 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B}(8,-9)$$

את שיעורי הנקודה D נמצא מפתרון מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x+3y+19=0 \\ y=3x-3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x+3(3x-3)+19=0$$

$$x+9x-9+19=0 \quad \Rightarrow \quad 10x=-10 \quad \Rightarrow \quad x=-1$$

$$y=3\cdot(-1)-3=-6 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{D}(-1,-6)$$

ואז:

$$\mathrm{BD}=\sqrt{(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{D}})^2+(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{D}})^2}=$$

$$=\sqrt{(8+1)^2+(-9+6)^2}=\sqrt{90}$$

מכיוון שגובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם תיכון לבסיס, נקבל:

$\mathrm{BC}=2\cdot\mathrm{BD}=2\sqrt{90}=6\sqrt{10}$ יחידות אורך

(ג) נמצא את שטח משולש ABC על-ידי:

$$S_{\Delta \mathrm{ABC}}=\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}}{2}$$

$\mathrm{BC}=6\sqrt{10}$ יחידות אורך

$$\mathrm{AD}=\sqrt{(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{D}})^2+(y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{D}})^2}=$$

$=\sqrt{(3+1)^2+(6+6)^2}=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$ יחידות אורך

$S_{\Delta \mathrm{ABC}}=\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}}{2}=\frac{6\sqrt{10}\cdot 4\sqrt{10}}{2}=\frac{240}{2}=120$ יחידות שטח

(3) נתון: בכד n כדורים: 6 אדומים, 4 שחורים ו- $(n-10)$ צהובים.

הוצאת כדור אדום מזכה ב- 200 ש״ח,

הוצאת כדור צהוב מזכה ב- 100 ש״ח,

הוצאת כדור שחור מזכה ב- 0 ש״ח.

$P(\text{אדום})=P(200)=\frac{6}{n}\ ,\ P(\text{שחור})=P(0)=\frac{4}{n}\ ,$

$P(\text{צהוב})=P(100)=\frac{n-10}{n}$

(א) $P(\text{זכייה ב - 100 ש״ח})=P(\text{צהוב})=\frac{n-10}{n}$

(ב) (i) $P(\text{זכייה ב - 100 ש״ח בדיוק})=P(100)\cdot P(0)+P(0)\cdot P(100)$

$P(\text{זכייה ב - 100 ש״ח בדיוק})=\frac{n-10}{n}\cdot\frac{4}{n}+\frac{4}{n}\cdot\frac{n-10}{n}=\frac{8}{n^2}(n-10)$

$\frac{8}{n^2}(n-10)=0.2$

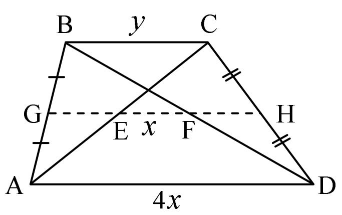
$n^2-40n+400=0\ \Rightarrow\ (n-20)^2=0\ \Rightarrow\ n=20$

$P(0)=\frac{4}{n}=\frac{4}{20}=0.2$

(ii) $P(\text{100 ש״ח / 100 ש״ח או 0 ש״ח})=\frac{0.2}{0.2+P(0)\cdot P(0)}=$

$=\frac{0.2}{0.2+\frac{4}{20}\cdot\frac{4}{20}}=\frac{0.2}{0.24}=\frac{5}{6}$

(4) (א) ניעזר בסרטוט הבא:



מכיוון ש- GH קטע אמצעים בטרפז,

הרי ש- $AG=BG$ ו- $GE\parallel BC$,

לכן GE קטע אמצעים במשולש ABC

(ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל

לצלע השנייה, חוצה את הצלע השלישית).

ומכאן הנקודה E היא אמצע האלכסון AC .

בדרך דומה מראים כי הנקודה F היא אמצע האלכסון BD .

(ב) נסמן: $EF=x$ ואז $AD=4x$. נסמן $BC=y$.

צריך להוכיח ש- $AD=2y$.

המשך בעמוד הבא >>>

GE קטע אמצעים במשולש ABC , לכן $GE=\frac{1}{2}y$.

FH קטע אמצעים במשולש BCD , לכן $FH=\frac{1}{2}y$.

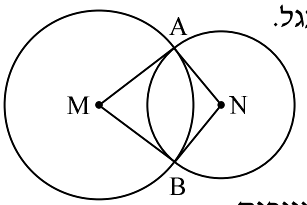
כלומר: $GH=GE+EF+FH=\frac{1}{2}y+x+\frac{1}{2}y=x+y$

אבל קטע אמצעים בטרפז שווה לממוצע אורכי הבסיסים, לכן:

$$x+y=\frac{4x+y}{2} \quad\Rightarrow\quad 2x+2y=4x+y \quad\Rightarrow\quad y=2x$$

כלומר, $AD=4x=2y$, ולכן הוכחנו כי: $AD=2\cdot BC$.

(5) (א) $NA=NB$, $MA=MB$ רדיוסים שווים במעגל.

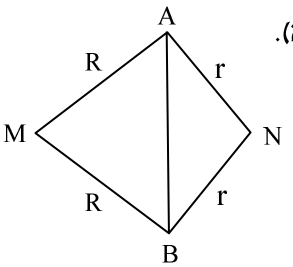


$\Downarrow$

ANBM הוא דלתון.

$\Downarrow$

$MN\perp AB$ אלכסוני הדלתון מאונכים זה לזה. מ.ש.ל (א).



(ב) נסמן: $\measuredangle AMB=\alpha$, אז $\measuredangle ANB=2\alpha$

$$\frac{R}{r}=\frac{3}{2} \Rightarrow R=\frac{3}{2}r$$

צ"ל: $\alpha=?$

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔAMB :

$$AB^2=AM^2+MB^2-2AM\cdot MB\cdot\cos\measuredangle M$$

$$AB^2=R^2+R^2-2\cdot R\cdot R\cdot\cos\alpha=2R^2(1-\cos\alpha)$$

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔANB :

$$AB^2=AN^2+NB^2-2AN\cdot NB\cdot\cos\measuredangle N$$

$$AB^2=r^2+r^2-2\cdot r\cdot r\cdot\cos 2\alpha=2r^2(1-\cos 2\alpha)$$

מהשוואת ביטויים ל- AB^2 נקבל:

$$\cancel{2}R^2(1-\cos\alpha)=\cancel{2}r^2(1-\cos 2\alpha)$$

$$\frac{9}{4}\cancel{r^2}(1-\cos\alpha)=\cancel{r^2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$1-\cos 2\alpha=1-(2\cos^2\alpha-1)=2-2\cos^2\alpha$$

$$9-9\cos\alpha=4(2-2\cos^2\alpha) \Rightarrow 8\cos^2\alpha-9\cos\alpha+1=0$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$(\cos\alpha)_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{16} = \frac{9 \pm 7}{16} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow \frac{1}{8} \end{matrix}$$

$\cos\alpha = \frac{1}{8}$ או $\cos\alpha = 1 \Rightarrow \cancel{\alpha = 0}$

$\alpha = \pm 82.82° + 360° n$ לא מתאים.

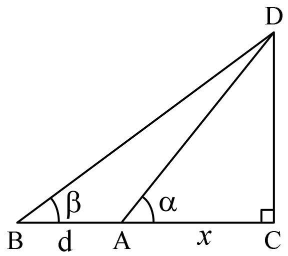
לפי נתוני הבעיה $0 < \alpha < 90°$

$\Downarrow$

$\measuredangle AMB = \alpha = 82.82°$

(6) נתון: $\measuredangle DBA = \beta$, $\measuredangle DAC = \alpha$

$AB = d$, $\measuredangle DCA = 90°$



נסמן: $AC = x$

צריך לבטא את x באמצעות d , α ו- β .

ב- ΔACD : $DC = x\tan\alpha$

ב- ΔBCD : $DC = BC \cdot \tan\beta = (d+x)\tan\beta$

מכאן נובע: $x\tan\alpha = d\tan\beta + x\tan\beta$

$$x\tan\alpha - x\tan\beta = d\tan\beta$$

$$x(\tan\alpha - \tan\beta) = d\tan\beta$$

$$x = \frac{d\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$$

אפשר לפשט את הביטוי:

$$x = \frac{d\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} = \frac{d\tan\beta}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} =$$

$$= \frac{d\sin\beta}{\cancel{\cos\beta}} \cdot \frac{\cos\alpha\,\cancel{\cos\beta}}{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha} = \frac{d\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$$

(7) הפונקציה הנתונה: $y=\frac{x}{\sqrt{x}-1.5}$

(א) תחום ההגדרה:

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ \sqrt{x}-1.5\ne 0 \;\Rightarrow\; x\ne 2.25 \end{cases}$$ וגם

כלומר, תחום ההגדרה: $0\le x<2.25$ או $x>2.25$.

(ב) בנקודת חיתוך עם ציר ה- y, $x=0$. $y=\frac{0}{\sqrt{0}-1.5}=0 \;\Rightarrow\; (0,0)$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x, $y=0$.

$$0=\frac{x}{\sqrt{x}-1.5} \;\Rightarrow\; x=0 \;\Rightarrow\; (0,0)$$

(ג)

$$y'=\frac{1\cdot(\sqrt{x}-1.5)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x}{(\sqrt{x}-1.5)^2}=\frac{\sqrt{x}-1.5-\frac{\sqrt{x}}{2}}{(\sqrt{x}-1.5)^2}=\frac{\sqrt{x}-3}{2(\sqrt{x}-1.5)^2}$$

$$y'=0 \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{x}-3}{2(\sqrt{x}-1.5)^2}=0 \;\Rightarrow\; \sqrt{x}=3 \;\Rightarrow\; x=9$$

x	x = 0	0 < x < 2.25	x = 2.25	2.25 < x < 9	x = 9	x > 9
y′		−	נקודת אי-הגדרה	−	0	+
y		↘		↘	min	↗

$$y(9)=\frac{9}{\sqrt{9}-1.5}=\frac{9}{3-1.5}=\frac{9}{1.5}=6 \;\Rightarrow\; (9,6)$$

$$y'(1)=\frac{1-3}{2\,(\sqrt{1}-1.5)^2}<0\ ,\ y'(4)=\frac{2-3}{2\,(\sqrt{4}-1.5)^2}<0$$

$$y'(16)=\frac{4-3}{2\,(\sqrt{16}-1.5)^2}>0$$

לפי התרשים הנ"ל שיעורי נקודות הקיצון הם:

$\min(9,6)\ ,\ \max(0,0)$ (בקצה).

(ד) מהתרשים בסעיף (ג):

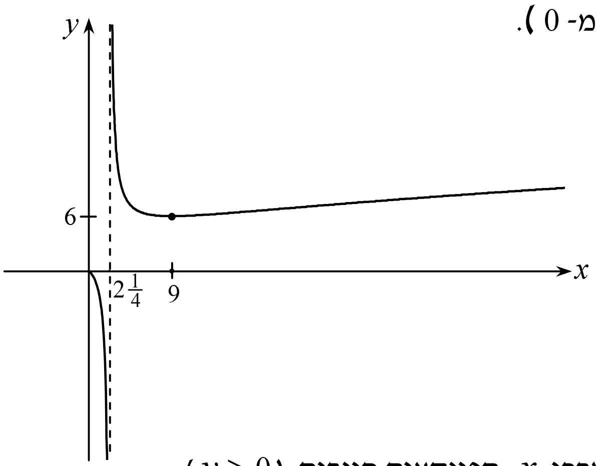
תחום העלייה של הפונקציה: $x>9$.

תחומי הירידה של הפונקציה: $2.25<x<9\ ,\ 0\le x<2.25$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ה) משוואת אסימפטוטה אנכית $x = 2.25$ (עבור ערך זה של x המכנה שווה ל- 0 והמונה שונה מ- 0).

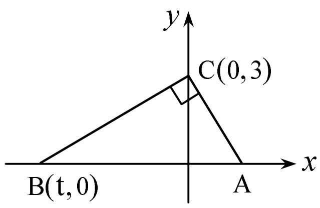
(ו)



(ז) צריך למצוא עבור אילו ערכי x הפונקציה חיובית ($y > 0$) ויורדת ($y' < 0$).

לפי הגרף ולפי סעיף (ד) נקבל: $2.25 < x < 9$.

(8) (א) + (ב)



נסמן: $x_B = t$ ואז: $B(t,0)$ ($t < 0$).

נתון:

$$BC \perp CA \ \Rightarrow \ m_{BC} \cdot m_{AC} = -1$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3-0}{0-t} = -\frac{3}{t}$$

$$-\frac{3}{t} \cdot m_{AC} = -1 \ \Rightarrow \ m_{AC} = \frac{t}{3}$$

משוואת AC :

$$y - y_C = \frac{t}{3} \cdot (x - x_C)$$

$$y - 3 = \frac{t}{3}(x - 0) \ \Rightarrow \ y = \frac{t}{3}x + 3$$

(ג) הנקודה A נמצאת על ציר ה- x , לכן נציב $y = 0$ במשוואת AC

ונקבל:

$$0 = \frac{t}{3}x + 3 \ \Rightarrow \ \frac{t}{3}x = -3 \ \Rightarrow \ x = -\frac{9}{t} \ \Rightarrow \ A\left(-\frac{9}{t}, 0\right)$$

$$AB = x_A - x_B = -\frac{9}{t} - t$$

(ד) נסמן את פונקציית מטרה – אורך הצלע AB ב- $F(t)$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$F(t)=-\frac{9}{t}-t$

$F'(t)=\frac{9}{t^2}-1$

$F'(t)=0 \Rightarrow \frac{9}{t^2}-1=0 \Rightarrow t^2=9 \Rightarrow t=\pm 3$

נתון שנקודה B נמצאת משמאל לראשית הצירים, לכן, שיעור ה- x שלה קטן מ- 0. כלומר, $x_B=t=-3 \Rightarrow B(-3,0)$.

נחשב נגזרת שנייה: $F''(t)=-\frac{18}{t^3}$

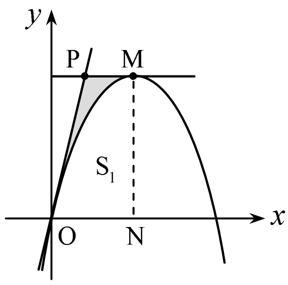
נבדוק סוג הקיצון עבור $t=-3$: $F''(-3)=-\frac{18}{(-3)^3}>0 \Rightarrow \min$

לכן, עבור $t=-3$ אורך הצלע AB יהיה מינימלי.

(ה) הנקודות A ו- B הן סימטריות ביחס לציר ה- y.
נקודה C נמצאת על ציר ה- y
(ציר הסימטריה), לכן ΔCBA
הוא משולש שווה-שוקיים וישר-זווית.

לכן, $\measuredangle A=\measuredangle B=\frac{180°-\measuredangle C}{2}=45°$

דרך נוספת: $\tan\measuredangle B=\frac{CO}{BO}=\frac{y_C-y_O}{x_O-x_B}=\frac{3-0}{0-(-3)}=1 \Rightarrow \measuredangle B=45°$



(9) הפונקציה הנתונה $y = 2ax - x^2$ $(a > 0)$.

(א) נבטא את שיעורי נקודת המקסימום של הפרבולה, הנקודה M :

$$x_M = -\frac{b}{2a}$$

$$x_M = -\frac{2a}{-2} = a$$

$$y_M = 2a \cdot a - a^2 = a^2$$

$$M(a, a^2)$$

משוואת המשיק בנקודת הקיצון : $y = y_M \Rightarrow y = a^2$

$$y' = 2a - 2x \Rightarrow m_O = y'(0) = 2a - 2 \cdot 0 = 2a$$

משוואת המשיק בנקודה O : $y - y_O = 2a \cdot (x - x_O)$

$$y = 2ax$$

(ב) P היא נקודת החיתוך של שני המשיקים, לכן למציאת שיעורי נקודה P יש לפתור מערכת משוואות :

$$\begin{cases} y = a^2 \\ y = 2ax \end{cases}$$

$$2ax = a^2 \quad / \ :2a \quad (a \neq 0)$$

$$x_P = \frac{a}{2} \Rightarrow y_P = a^2 \Rightarrow P\left(\frac{a}{2}, a^2\right)$$

(ג)

$$S_{OPMN} = \frac{(PM + ON) \cdot MN}{2} = \frac{[(x_M - x_P) + x_N] \cdot (y_M - y_N)}{2} =$$

$$= \frac{(a - \frac{a}{2} + a) \cdot (a^2 - 0)}{2} = \frac{3a}{4} \cdot a^2 = \frac{3}{4} \cdot a^3 = \text{יחידות שטח } 0.75a^3$$

(ד) נחשב את השטח המבוקש (המקווקו) כהפרש בין שטח הטרפז OPMN לבין השטח S_1, המוגבל בין פרבולה וציר ה- x בגבולות מ- 0 עד $x_N = a$.

$$S_1 = \int_0^a (2ax - x^2)\,dx = \left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} - 0 = \frac{2a^3}{3}$$

מכאן : $S_{\text{שטח מקווקו}} = \frac{3}{4}a^3 - \frac{2a^3}{3} = \text{יחידות שטח } \frac{a^3}{12}$

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929