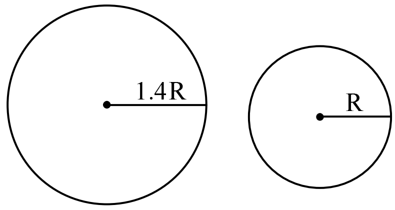
פתרון מבחן מס' 2 (ספר לימוד – שאלון 035804)

09-05-2017

(1) (א) רדיוס המעגל הראשון:

$$\frac{100+40}{100}\cdot \mathrm{R}=1.4\mathrm{R}$$



$$S_{\text{עיגול גדול}}-S_{\text{עיגול קטן}}=\pi(1.4\mathrm{R})^2-\pi\mathrm{R}^2=\pi\mathrm{R}^2(1.96-1)=0.96\pi\mathrm{R}^2$$

(ב) x יסמן בכמה אחוזים גדול שטח העיגול הגדול משטח העיגול הקטן.

אז:

$$\begin{cases}0.96\pi\mathrm{R}^2 & \to\ x\% \\ \pi\mathrm{R}^2 & \to\ 100\%\end{cases}\ \Rightarrow\ x=\frac{0.96\pi\mathrm{R}^2\cdot 100\%}{\pi\mathrm{R}^2}=96\%$$

(ג) ידוע שרדיוס המעגל הראשון גדול ב- $\mathrm{p}\%$ מרדיוס המעגל השני.

סעיף (א):

$$S_{\text{עיגול גדול}}-S_{\text{עיגול קטן}}=\pi\left[\left(1+\frac{\mathrm{p}}{100}\right)\cdot\mathrm{R}\right]^2-\pi\mathrm{R}^2=$$

$$=\pi\mathrm{R}^2\left[\left(1+\frac{\mathrm{p}}{100}\right)^2-1\right]$$

סעיף (ב):

$$\begin{cases}\pi\mathrm{R}^2\left[\left(1+\frac{\mathrm{p}}{100}\right)^2-1\right] & \to\ x\% \\ \pi\mathrm{R}^2 & \to\ 100\%\end{cases}$$

$$x=\frac{\pi\mathrm{R}^2\left[\left(1+\frac{\mathrm{p}}{100}\right)^2-1\right]\cdot 100\%}{\pi\mathrm{R}^2}=\left[\left(1+\frac{\mathrm{p}}{100}\right)^2-1\right]100\%$$

(2) (א) הזווית AOB היא זווית היקפית בת $90°$, לכן היא נשענת על קוטר,
כלומר AB הוא קוטר במעגל.

(ב) מרכז המעגל נמצא באמצע הקוטר, כלומר מרכז המעגל הוא נקודת
אמצע הקטע AB.

$$\mathrm{M}\left(\frac{-6+0}{2},\frac{0-8}{2}\right)=\mathrm{M}(-3,-4)$$

$$\mathrm{R}^2=(\mathrm{AM})^2=(-3+6)^2+(-4-0)^2=25$$

כלומר משוואת המעגל היא: $(x+3)^2+(y+4)^2=25$.

המשך בעמוד הבא >>>

(ג) $AO=0-(-6)=6\ ,\ BO=0-(-8)=8\ ,\ AB=2\cdot R=2\cdot 5=10$

ומכאן מוצאים את שטח והיקף משולש AOB :

$S_{\Delta AOB}=$ 24 יחידות שטח

$P_{\Delta AOB}=$ 24 יחידות אורך

(ד) נתון : $S_{\Delta COA}=9$

$S_{\Delta COA}=\dfrac{AO\cdot \text{הגובה מ- C לצלע AO}}{2}$

$9=\dfrac{6\cdot \text{הגובה מ- C לצלע AO}}{2}\ \Rightarrow\ \text{הגובה מ - C לצלע AO}=3$

כלומר שיעור ה- y של הנקודה C הוא -3 .

למציאת שיעור ה- x של הנקודה C נציב $y=-3$ במשוואת המעגל

ונקבל : $C(-7.9,-3)$.

(ה) **טענה** : התיכון CM ב- ΔABC מחלק אותו לשני משולשים שווי-שטח.

נוכיח טענה זו :

$S_{\Delta ACM}=\frac{1}{2}\cdot AM\cdot(\text{גובה מ- C ל- AM})$

$S_{\Delta BCM}=\frac{1}{2}\cdot BM\cdot(\text{גובה מ- C להמשך BM})$

מכיוון ש- $AM=BM$ והגובה מ- C ל- AM מתלכד עם הגובה מ- C להמשך BM , הרי ש : $S_{\Delta ACM}=S_{\Delta BCM}$, כלומר : $S_{\Delta ACM}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$.

$\measuredangle ACB=90^\circ$ כי היא זווית היקפית הנשענת על הקוטר AB .

מכאן : $S_{\Delta ACB}=\dfrac{AC\cdot BC}{2}$.

נחשב את אורכי הקטעים AC ו- BC ונמצא את שטח משולש ACB ולאחר מכן את שטח משולש ACM .

$S_{\Delta ACB}=$ 16.6 יחידות שטח $\ \Rightarrow\ S_{\Delta ACM}=$ 8.3 יחידות שטח

(3) (א) נסמן ב- A את המאורע לבחור באקראי פרח ריחני.

נסמן ב- B את המאורע לבחור באקראי פרח אדום.

נתון : $P(B/A)=0.6$

$P(A/B)=0.65$

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

(כי מאורעות A ו- B בלתי-תלויים)

	A	$\overline{A}$	
B	0.39	0.21	0.6
$\overline{B}$	0.26	0.14	0.4
	0.65	0.35	1

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

צ"ל: $P(B)=?$

נרכיב טבלה מתאימה.

היות והמאורעות A ו- B בלתי תלויים: $P(A/B)=P(A)=0.65$

$$P(B/A)=P(B)=0.6$$

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0.65=0.35$$

$$P(\bar{B})=1-P(B)=1-0.6=0.4$$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.65\cdot 0.6=0.39$$

$$P(\bar{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0.6-0.39=0.21$$

$$P(A\cap \bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=0.65-0.39=0.26$$

$$P(\bar{A}\cap \bar{B})=P(\bar{A})-P(\bar{A}\cap B)=0.35-0.21=0.14$$

אחוז הפרחים האדומים הוא: $P(B)=0.6 \;\Rightarrow\; 60\%$

(ב) ההסתברות שפרח ריחני הוא אדום: $P_1=P(B/A)$

$$P_1=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.39}{0.65}=\frac{3}{5}$$

ההסתברות שפרח חסר ריח הוא אדום: $P_2=P(B/\bar{A})$

$$P_1=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(\bar{A})}=\frac{0.21}{0.35}=\frac{3}{5}$$

לכן: $P_1=P_2$

(ג) ההסתברות שהפרח שנבחר אדום או ריחני:

$$P(A\cup B)=1-P(\bar{A}\cap \bar{B})=1-0.14=0.86$$

(ד) לפי נוסחת ברנולי ההסתברות שבדיוק 3 מ- 8 הפרחים שנבחרו יהיו חסרי ריח:

$$P(\bar{A})=0.35 \;\Rightarrow\; P_8(3)=\frac{8!}{3!\cdot 5!}(0.35)^3(1-0.35)^5$$

$$P_8(3)=56\cdot 0.35^3\cdot 0.65^5\approx 0.2786$$

(4) (א) לפי משפט חוצה זווית במשולש ABD : $\frac{BD}{AB}=\frac{DE}{EA}$.

BD הוא אלכסון הריבוע שאורך צלעו AB , לכן לפי משפט פיתגורס

ניתן למצוא ש- $BD=\sqrt{2}\cdot AB$, ואז : $\frac{DE}{EA}=\frac{\sqrt{2}\cdot AB}{AB}=\sqrt{2}$.

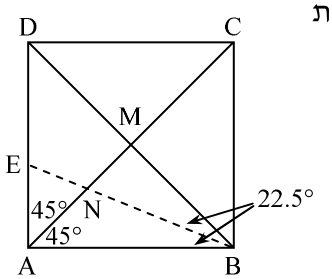
בדרך דומה ולפי משפט חוצה זווית במשולש ABM ,

מוצאים כי : $\frac{MN}{NA}=\frac{MB}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(ב) ניעזר בכך שאלכסונים בריבוע חוצים את הזוויות

ובכך שסכום זוויות במשולש הוא $180°$,

ונמצא כי :



$\measuredangle ANB=180°-45°-22.5°=112.5°$

מכאן : $\measuredangle ANE=180°-112.5°=67.5°$

(סכום זוויות צמודות שווה ל- $180°$),

ואז : $\measuredangle NEA=180°-45°-67.5°=67.5°$

כלומר $AE=AN$ (במשולש מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות).

כלומר ENA הוא משולש שווה-שוקיים.

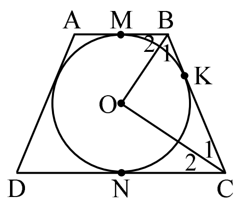
(ג) בסעיף (א) מצאנו : $\frac{MN}{NA}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{DE}{EA}=\sqrt{2}$.

מכאן נקבל : $\frac{\frac{DE}{EA}}{\frac{MN}{NA}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$. אך מכיוון ש- $AE=AN$ לפי סעיף (ב) ,

הרי שנקבל : $\frac{DE}{MN}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{1}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2 \Rightarrow DE=2\cdot MN$.

(5) נתון : $AB=2$ ס"מ , $DC=8$ ס"מ

$AB \parallel DC$, $AD=BC$



(א) BC , AB - משיקים למעגל.

CD , CB - משיקים למעגל.

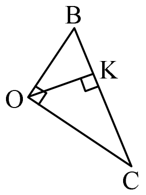
$\Downarrow$

BO , CO - חוצי-זוויות B ו- C בהתאמה.

(קטע המחבר נקודה ממנה יוצאים שני המשיקים למעגל עם מרכז המעגל,

חוצה את הזווית בין המשיקים.)

המשך בעמוד הבא ◄◄◄



נסמן: $\measuredangle C_1 = \measuredangle C_2 = \frac{1}{2}\measuredangle C = \alpha$

אז $\measuredangle B_1 = \measuredangle B_2 = \frac{1}{2}\measuredangle B = \frac{1}{2}(180° - 2\alpha) = 90° - \alpha$

נתבונן ב- ΔBOC (סרטוט משמאל).

$\measuredangle B = 90° - \alpha \ , \ \measuredangle C = \alpha$

$\Downarrow$

$\measuredangle D = 90°$

$OK \perp BC$ רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.

נסמן: $OK = R$

$BK = BM = \frac{1}{2}AB =$ 1 ס"מ

$CK = CN = \frac{1}{2}DC =$ 4 ס"מ

$OK^2 = BK \cdot KC$ גובה ליתר הוא ממוצע גאומטרי בין היטלי הניצבים ליתר.

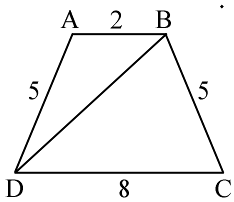
$R^2 = 1 \cdot 4 = 4$

$R =$ 2 ס"מ

(ב) $BD = ?$

$\measuredangle BCD = \measuredangle ADC$ זוויות בסיס בטרפז שווה-שוקיים שוות זו לזו.

$\measuredangle BAD + \measuredangle ADC = 180°$ סכום זוויות חד-צדדיות בין מקבילים שווה ל- $180°$.



$\Downarrow$

$\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = 180°$ הצבה.

נסמן: $\measuredangle BCD = \alpha$

אז: $\measuredangle BAD = 180° - \alpha$

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔBCD:

$$DB^2 = DC^2 + CB^2 - 2 \cdot DC \cdot CB \cdot \cos\measuredangle C$$

$$DB^2 = 64 + 25 - 80 \cdot \cos\alpha = 89 - 80\cos\alpha$$

לפי משפט הקוסיניוסים ב- ΔABD:

$$DB^2 = DA^2 + AB^2 - 2 \cdot DA \cdot AB \cdot \cos\measuredangle D$$

$$DB^2 = 25 + 4 - 20 \cdot \cos\measuredangle(180° - \alpha) = 29 + 20\cos\alpha$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

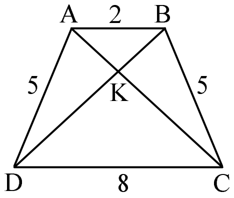
נשווה את שני הביטויים שקבלנו ל- DB^2 ונקבל :

$$89-80\cos\alpha = 29+20\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad 100\cos\alpha = 60$$

$$\cos\alpha = 0.6 \quad\Rightarrow\quad DB^2 = 89-80\cdot 0.6 = 89-48 = 41$$

$DB =$ ס"מ $\sqrt{41}$

(ג) (i) $\frac{BK}{KD} = ?$



$\Delta ABK \sim \Delta CDK$ לפי משפט דמיון ז.ז.ז

$$\Downarrow$$

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{DC} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

(ii) $\measuredangle BKC = ?$

$BK = \frac{1}{5}BD =$ ס"מ $\frac{\sqrt{41}}{5} \quad\Rightarrow\quad KC = KD = \frac{4}{5}BD =$ ס"מ $\frac{4\sqrt{41}}{5}$

(לפי סעיפים (ג)(i) ו- סעיף (ב).)

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔBKC :

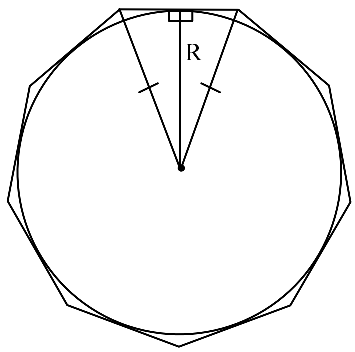
$$BC^2 = BK^2 + KC^2 - 2\cdot BK\cdot KC\cdot\cos\measuredangle K$$

$$25 = \frac{41}{25} + \frac{16\cdot 41}{25} - \frac{8\cdot 41}{25}\cos\measuredangle K \quad\Rightarrow\quad 328\cos\measuredangle K = 72$$

$$\cos\measuredangle K = \frac{72}{328} = \frac{9}{41} \quad\Rightarrow\quad \measuredangle K = \pm 77.32° + 360°n$$

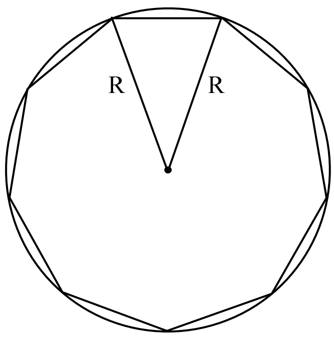
לפי משמעות התרגיל $0 < \measuredangle K < 90°$, לכן $\measuredangle K = 77.32°$.

(6) נסרטט בנפרד את המצולע המשוכלל החוסם את המעגל ואת המצולע המשוכלל החסום באותו מעגל.



I

מצולע משוכלל חוסם מעגל



II

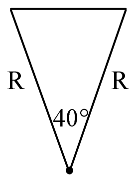
מצולע משוכלל חסום

נסמן ב- R את רדיוס המעגל הנתון.

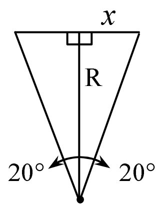
המשך בעמוד הבא ◄◄◄

בכל אחד מהמשולשים שווי- השוקיים שבסרטוטים, זווית הראש היא בת $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$.

נביע את השטח של כל אחד מהמשולשים באמצעות R (שטח כל משולש כזה הוא $\frac{1}{9}$ משטח המצולע המשוכלל המתאים).



I



II

$$S = \frac{R^2 \sin 40^\circ}{2} = 0.5R^2 \sin 40^\circ$$

$$\tan 20^\circ = \frac{x}{R} \quad \Rightarrow \quad x = R\tan 20^\circ$$

$$S = x \cdot R = R^2 \tan 20^\circ$$

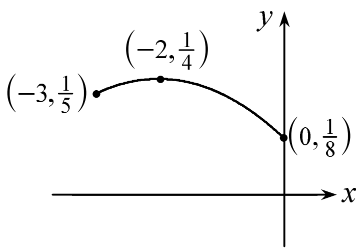
לכן היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לבין שטח המצולע החסום במעגל הוא :

$$\frac{R^2 \tan 20^\circ}{0.5R^2 \sin 40^\circ} = \frac{2\tan 20^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 1.132$$

(7) $f'(x) = -\frac{1}{(x^2+4x+8)^2} \cdot (2x+4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \quad \Rightarrow \quad \left(-2, \frac{1}{4}\right)$

שיעורי נקודות הקצה של התחום הסגור הן : $\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $\left(-3, \frac{1}{5}\right)$.

למציאת נקודות המינימום / מקסימום מקומיות / מוחלטות כדאי להיעזר בסרטוט סקיצה של גרף הפונקציה, וממנה נקבל כי :



$\left(0, \frac{1}{8}\right)$ מינימום מקומי ומוחלט,

$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$ מקסימום מקומי ומוחלט,

$\left(-3, \frac{1}{5}\right)$ מינימום מקומי.

(8) (א) נתון: $f'(8)=0$, $f(8)=-32$.

$$f'(x)=1\sqrt{ax}+x\cdot\frac{a}{2\sqrt{ax}}+b=\sqrt{ax}+\frac{\sqrt{a}\sqrt{x}}{2}+b=1.5\sqrt{ax}+b$$

נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases}-32=8\sqrt{8a}+8b\\ 0=1.5\sqrt{8a}+b \quad\Rightarrow\quad b=-1.5\sqrt{8a}\end{cases}$$

ואז: $-32=8\sqrt{8a}+8\cdot\left(-1.5\sqrt{8a}\right) \quad\Rightarrow\quad \sqrt{8a}=8$

מכאן: $b=-12$, $a=8$.

(ב) $f(x)=x\sqrt{8x}-12x$

תחום ההגדרה: $8x\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x\geq 0$.

(ג) + (ד)

נגזור, נשווה נגזרת לאפס וניעזר בטבלה למציאת תחומי עלייה / ירידה ולקביעת סוג הקיצון בנקודה $(8,-32)$.

נקבל: תחום עלייה: $x>8$, תחום ירידה: $0\leq x<8$

ו- $\min(8,-32)$.

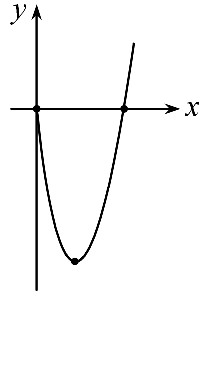
(ה) $x=0 \quad\Rightarrow\quad f(0)=0 \quad\Rightarrow\quad (0,0)$

$f(x)=0 \quad\Rightarrow\quad 0=x\sqrt{8x}-12x$

$x\left(\sqrt{8x}-12\right)=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0\ ,\ x_2=18$

כלומר נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים: $(18,0)$, $(0,0)$.

(ו) נעלה את נקודת המינימום,
את נקודות החיתוך עם הצירים
ונתחשב בתחום ההגדרה, ונקבל:



(9) $f'(x) = 2\mathrm{a}\,x + \mathrm{b}$

נתון: $f'(0) = -2$, מכאן נקבל: $\mathrm{b} = -2 \quad \Rightarrow \quad -2 = 0 + \mathrm{b}$.

נתון: $f'(1) = -1.5$, מכאן נקבל: $\mathrm{a} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad -1.5 = 2 \cdot \mathrm{a} \cdot 1 - 2$.

כלומר: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + \mathrm{c}$.

$$x_{\text{קדקוד}} = -\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}} = \frac{2}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 4$$

לכן:

$$S = \int_0^4 \left(\tfrac{1}{4}x^2 - 2x + \mathrm{c}\right) dx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{16}{3} = \frac{x^3}{4 \cdot 3} - \frac{2x^2}{2} + \mathrm{c}\,x \Big|_0^4$$

$$\frac{16}{3} = \frac{4^3}{12} - 4^2 + 4\mathrm{c} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{c} = 4$$

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות