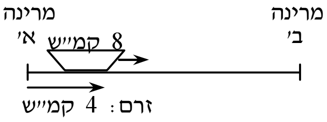
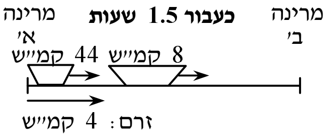
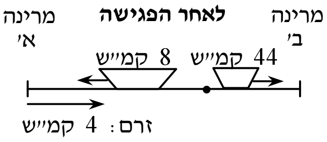
פתרון מבחן מס' 1 (ספר לימוד – שאלון 035804)

09-05-2017







(1) נסמן את המרחק בין המרינות א' ו- ב' ב- S .

מהירות הסירה הראשונה במים עומדים 8 קמ"ש.

לכן, מהירותה כששטה עם כיוון הזרם:

$8+4=$ 12 קמ"ש .

הדרך שעברה הסירה הראשונה במשך 1.5 שעות:

$1.5\cdot 12=$ 18 ק"מ .

מהירות הסירה השנייה ביחס לסירה הראשונה

היא: $44-8=$ 36 קמ"ש .

לכן, הסירה השנייה תשיג את הסירה הראשונה

כעבור $\frac{1}{2}$ שעה $t=\frac{18}{36}=$.

כלומר, נקודת הפגישה נמצאת במרחק $\frac{1}{2}\cdot(44+4)=$ 24 ק"מ ממרינה א',

ובמרחק $S-24$ ק"מ ממרינה ב'.

מהירות הסירה הראשונה בדרך חזרה למרינה א' (נגד הזרם)

היא $8-4=$ 4 קמ"ש .

הזמן מנקודת הפגישה ועד להגעת הסירה הראשונה למרינה א'

הוא $\frac{24}{4}=$ 6 שעות .

הזמן מנקודת הפגישה ועד להגעת הסירה השנייה למרינה ב' הוא $\frac{S-24}{48}$ שעות.

לפי נתוני הבעיה משך הזמן מנקודת הפגישה ועד להגעת כל אחת מהסירות למרינות שווה.

לכן: $\frac{S-24}{48}=6 \;\Rightarrow\; S-24=6\cdot 48 \;\Rightarrow\; S=$ 312 ק"מ

(2) משוואת המעגל הנתונה: $(x-5)^2+(y+\mathrm{m})^2=41$

(א) נקודה $A(10,6)$ נמצאת על המעגל, לכן שיעוריה מקיימים את משוואתו.

כלומר: $(10-5)^2+(6+\mathrm{m})^2=41$

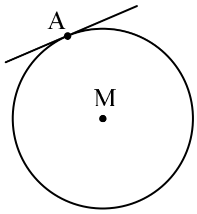
נחשב את m: $25+(6+\mathrm{m})^2=41 \;\Rightarrow\; (6+\mathrm{m})^2=16$

$6+\mathrm{m}=4 \;\Rightarrow\; \mathrm{m}=-2$

$6+\mathrm{m}=-4 \;\Rightarrow\; \mathrm{m}=-10$

(ב) עבור $\mathrm{m}=-2$, מרכז המעגל הוא: $M_1(5,2)$

ועבור $\mathrm{m}=-10$, מרכז המעגל הוא: $M_2(5,10)$.



עבור המעגל שמרכזו $M_1(5,2)$:

שיפוע הרדיוס AM_1 :

$$\mathrm{m}_{AM_1}=\frac{y_A-y_{M_1}}{x_A-x_{M_1}}=\frac{6-2}{10-5}=\frac{4}{5}$$

המשיק למעגל בנקודה A מאונך לרדיוס AM_1 .

לכן, $\mathrm{m}_{AM_1}\cdot\mathrm{m}_{\text{משיק}}=-1 \;\Rightarrow\; \frac{4}{5}\mathrm{m}_{\text{משיק}}=-1 \;\Rightarrow\; \mathrm{m}_{\text{משיק}}=-\frac{5}{4}$

ומשוואת המשיק: $y-y_A=\mathrm{m}_{\text{משיק}}\cdot(x-x_A)$

$y-6=-\frac{5}{4}(x-10) \;\Rightarrow\; y=-1\frac{1}{4}x+18\frac{1}{2}$

עבור המעגל שמרכזו $M_2(5,10)$, שיפוע הרדיוס AM_2 :

$$\mathrm{m}_{AM_2}=\frac{y_A-y_{M_2}}{x_A-x_{M_2}}=\frac{6-10}{10-5}=\frac{-4}{5}$$

המשיק למעגל בנקודה A מאונך לרדיוס AM_2 ,

לכן, $\mathrm{m}_{AM_2}\cdot\mathrm{m}_{\text{משיק}}=-1 \;\Rightarrow\; -\frac{4}{5}\cdot\mathrm{m}_{\text{משיק}}=-1 \;\Rightarrow\; \mathrm{m}_{\text{משיק}}=\frac{5}{4}$

$y-y_A=\mathrm{m}_{\text{משיק}}\cdot(x-x_A)$

$y-6=\frac{5}{4}(x-10) \;\Rightarrow\; y=1\frac{1}{4}x-6\frac{1}{2}$

(3) לפנינו שאלה המשלבת התפלגות בינומית.

(א) נתון: $\underbrace{P_4(2)}_{\text{ההסתברות ל-2 הצלחות מתוך 4 נסיונות}} = \underbrace{P_4(0)}_{\text{ההסתברות ל-0 הצלחות מתוך 4 נסיונות}} \cdot 96$

ניעזר בנוסחת ברנולי: $P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

ונקבל: $\binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^2 = 96 \cdot \binom{4}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^4$

$$6p^2(1-p)^2 = 96 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1-p)^4 \quad / : 6(1-p)^2 \neq 0$$

$$p^2 = 16(1-p)^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 16 - 32p + 16p^2$$

$$15p^2 - 32p + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = \frac{32 \pm 8}{30} \quad \Rightarrow \quad p_1 = \frac{4}{3}\ ,\ p_2 = 0.8$$

הפתרון $p_1 = \frac{4}{3}$ נפסל כי הסתברות לא יכולה להיות גדולה מ- 1 .

(ב) יש לחשב את: $p = P_4(3) + P_4(4)$.

$$P_4(3) = \binom{4}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p) = 4 \cdot 0.8^3 \cdot (1-0.8) = 0.4096$$

$$P_4(4) = \binom{4}{4} \cdot p^4 = 1 \cdot 0.8^4 = 0.4096$$

$$p = 0.4096 + 0.4096 = 0.8192$$

(ג) יש לחשב את ההסתברות המותנית הבאה:

$$P\left(\text{בדיוק 3 תלמידים הצליחו} \,/\, \text{לפחות 3 תלמידים הצליחו}\right) = \frac{P\left(\text{לפחות 3 תלמידים הצליחו} \cap \text{בדיוק 3 תלמידים הצליחו}\right)}{P\left(\text{לפחות 3 תלמידים הצליחו}\right)}$$

יש להבין שההסתברות של המונה היא בעצם ההסתברות שבדיוק 3 תלמידים הצליחו. לכן לפי סעיף (ב):

$$P = \frac{P_4(3)}{0.8192} = \frac{\binom{4}{3} \cdot 0.8^3 \cdot 0.2^1}{0.8192} = 0.5$$

(4) (א) בעזרת משפט פיתגורס ב- ΔADE נמצא כי: $DE = 6$ ס"מ.

נראה כי $\Delta ACB \sim \Delta AED$ לפי משפט דמיון ז.ז.

מכאן נקבל:

$$\frac{AC}{AE} = \boxed{\frac{AB}{AD}} = \boxed{\frac{BC}{ED}}$$

$$\frac{20}{10} = \frac{BC}{6} \quad \Rightarrow \quad BC = 12 \text{ ס"מ}$$

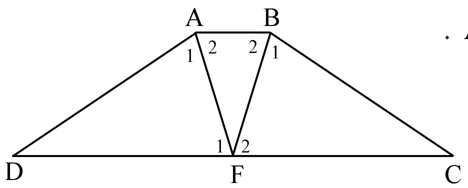
(ב) בעזרת משפט פיתגורס ב- ΔABC נמצא כי: $AC = 16$ ס"מ.

ואז: $DC = 16 - 10 = 6$ ס"מ ואז $\Delta ADE \cong \Delta FDC$ לפי

משפט חפיפה: זווית (זוויות קדקודיות), צלע, זווית (זוויות ישרות).

(5) נתון: $AB \parallel DC$, $AD = BC = 3AB$.

$\measuredangle B_1 = \measuredangle B_2$, $\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$



(א) צ"ל: $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{\Delta ABF}} = ?$

$\measuredangle F_1 = \measuredangle A_2$ זוויות מתחלפות בין מקבילים ($AB \parallel DC$) שוות זו לזו.

$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$ נתון.

$\Downarrow$

$\measuredangle F_1 = \measuredangle A_1$ שני גדלים השווים לגודל שלישי, שווים ביניהם.

$\Downarrow$

$AD = DF$ **(1)** ב- ΔADF מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.

באותו אופן אפשר להוכיח כי:

$FC = BC$ **(2)**.

נסמן: $AB = a$, אז $FC = BC = AD = DF = 3a$ (לפי הנתון).

$$S_{ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \cdot h_{\text{טרפז}} \overset{(2)\,(1)}{=} \frac{a + (3a + 3a)}{2} \cdot h_{\text{טרפז}} = \frac{7}{2} a \cdot h_{\text{טרפז}}$$

$$S_{\Delta ABF} = \frac{AB \cdot h_{\Delta}}{2} = \frac{a}{2} \cdot h_{\Delta}$$

$h_{\text{טרפז}} = h_{\Delta}$ מרחקים שווים בין ישרים מקבילים.

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\Delta ABF}} = \frac{7}{2} a \cdot h : \frac{a}{2} \cdot h = \frac{7}{2} a \cdot h \cdot \frac{2}{a \cdot h} = 7$$

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

(ב) צ"ל זוויות הטרפז: $\measuredangle D\ ,\ \measuredangle C\ ,\ \measuredangle B\ ,\ \measuredangle A$.

נתבונן ב- ΔADF וב- ΔABF .

$\measuredangle A = \measuredangle B$ זוויות בסיס בטרפז שווה-שוקיים שוות זו לזו.

$\Downarrow$

$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2 = \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2 = \alpha$

זוויות שגודלן חצאים של זוויות שוות, שוות זו לזו.

$\measuredangle F_1 = \measuredangle A_2 = \alpha$ הוכחנו בסעיף (א).

$\Downarrow$

$\measuredangle B_2 = \measuredangle F_1 = \alpha$

$\Delta ADF \sim \Delta AFB$ לפי משפט דמיון ז.ז.

$\Downarrow$

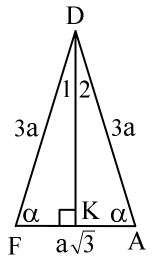
$\frac{AD}{AF} = \frac{AF}{AB}$ היחס בין צלעות מתאימות במשולשים דומים הוא

$\Downarrow$ יחס הדמיון (יחס קבוע).

$\frac{3a}{AF} = \frac{AF}{a}$ הצבה.

$AF^2 = 3a^2$

$AF = a\sqrt{3}$



נתבונן ב- ΔADF (ראו סרטוט).

נעביר $DK \perp FA$

$\Downarrow$

$FK = KA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ הגובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם

$\measuredangle D_1 = \measuredangle D_2$ תיכון לבסיס וחוצה-זווית הראש.

במשולש ΔDFK :

$$\cos\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2\cdot 3a} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\alpha = 73.22°$$

$\Downarrow$

$$\measuredangle C = \measuredangle D = 33.56°\ \ ,\ \ \measuredangle A = \measuredangle B = 2\alpha = 146.44°$$

(ג) $AF = a\sqrt{3} = \sqrt{3}\cdot AB$ (מצאנו בסעיף (ב).

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

(ד) $S_{\Delta ABF} = 16.79$ סמ"ר   נתון.

$$\Downarrow$$

$$\frac{AB^2 \sin\alpha \cdot \sin\alpha}{2\sin(180^\circ - 2\alpha)} = 16.79$$

$$\frac{a^2 \sin^2 73.22^\circ}{2\sin 33.56^\circ} = 16.79$$

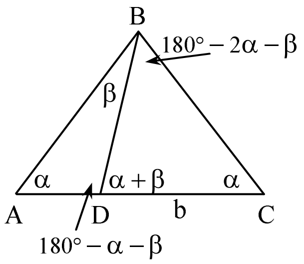
$$a^2 = 20.25$$

$a = 4.5$ ס"מ

$AB = 4.5$ ס"מ

$AD = BC = 3a = 13.5$ ס"מ

$DC = 6a = 27$ ס"מ



(6) (א) נמצא את כל הזוויות בעזרת המשפטים:

סכום זוויות במשולש הוא 180°,

במשולש שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות.

לפי משפט הסינוסים במשולש BCD:

$$\frac{b}{\sin(180^\circ - 2\alpha - \beta)} = \frac{BD}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad BD = \frac{b\sin\alpha}{\sin(2\alpha+\beta)}$$

לפי משפט הסינוסים במשולש ABD:

$$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad AD = \frac{BD\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b\sin\alpha\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha} = \frac{b\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}$$

(ב) מכיוון שנתון: $CD = 2\cdot AD$ ו- $CD = b$, הרי ש- $AD = \frac{b}{2}$.

נציב נתונים בביטוי ל- AD שמצאנו בסעיף (א) ונקבל:

$$\frac{b}{2} = \frac{b\sin\beta}{\sin(2\cdot 40^\circ + \beta)} \quad \Rightarrow \quad 2\sin\beta = \sin(80^\circ + \beta)$$

$$2\sin\beta = \sin 80^\circ\cos\beta + \cos 80^\circ\sin\beta$$

$$\sin\beta(2 - \cos 80^\circ) = \sin 80^\circ\cos\beta \quad / : (2-\cos 80^\circ)\cos\beta$$

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin 80^\circ}{2 - \cos 80^\circ} \quad \Rightarrow \quad \tan\beta = 0.539$$

(7) $f(x)=\frac{x^2-9}{x^4-81}$

(א) תחום ההגדרה של הפונקציה: $x^4-81\neq 0$

$x^4\neq 81 \Rightarrow x\neq \pm 3$

(ב) $\frac{x^2-9}{x^4-81}=\frac{x^2-9}{(x^2-9)(x^2+9)}=\frac{1}{x^2+9}$

אפשר לחלק את המונה ואת המכנה ב- (x^2-9)

בתנאי: $(x^2-9)\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 3$

כלומר עבור $x\neq \pm 3$, $f(x)=\frac{1}{x^2+9}$.

(ג) היות וחזקת המונה (2) קטנה מחזקת המכנה (4),

משוואת האסימפטוטה האופקית היא: $y=0$

(ד) נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y : $x=0$

$y=\frac{1}{0+9}=\frac{1}{9} \Rightarrow \left(0,\frac{1}{9}\right)$

נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x : $y=0$

$0=x^2-9 \Rightarrow x=\pm 3$

נקודות אלו אינן שייכות לתחום ההגדרה, לכן **אין** נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

(ה) $f'(x)=\left(\frac{x^2-9}{x^4-81}\right)'=\left(\frac{1}{x^2+9}\right)'=-\frac{2x}{(x^2+9)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow -\frac{2x}{(x^2+9)^2}=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0\ ,\ y=\frac{1}{9}$

x	$x<-3$	$x=-3$	$-3<x<0$	$x=0$	$0<x<3$	$x=3$	$x>3$
y'	+	נקודת אי-הגדרה	+	0	−	נקודת אי-הגדרה	−
y	↗		↗	**max**	↘		↘

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$f'(-4)=-\frac{-8}{+}>0 \qquad f'(-1)=-\frac{-2}{+}>0$

$f'(1)=-\frac{2}{+}<0 \qquad f'(4)=-\frac{8}{+}<0$

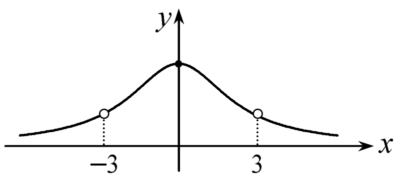
כלומר: $\max\left(0,\frac{1}{9}\right)$.

(ו) $y=\frac{1}{x^2+9}\ ,\ x\neq\pm3$

$y(\pm3)=\frac{1}{3^2+9}=\frac{1}{18}$

לכן בנקודות $\left(\pm3,\frac{1}{18}\right)$

יש "חורים" בגרף הפונקציה.

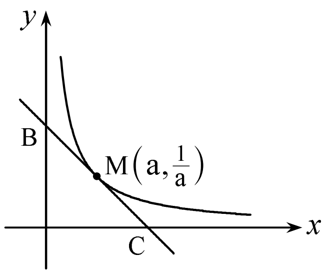


(8) (א) $f(x)=\frac{1}{x}\ \Rightarrow\ f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

$m_{\text{משיק}}=f'(a)=-\frac{1}{a^2}$

משוואת המשיק: $y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$

$y=-\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}$



(ב) שיעורי נקודה B (נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y):

$x=0\ \Rightarrow\ y=-\frac{0}{a^2}+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}\ \Rightarrow\ B\left(0,\frac{2}{a}\right)$

שיעורי הנקודה C (נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x):

$y=0\ \Rightarrow\ -\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}=0\ \Rightarrow\ \frac{x}{a^2}=\frac{2}{a}\ \Rightarrow\ x=2a\ \Rightarrow\ C(2a,0)$

$BC^2=(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2=(2a-0)^2+\left(0-\frac{2}{a}\right)^2$

$BC^2=4a^2+\frac{4}{a^2}=4\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$

המשך בעמוד הבא >>>

(ג) נסמן ב- $F(a)$ את פונקציית המטרה: $F(a)=BC^2$

$$F'(a)=\left(4\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\right)'=4\left(2a-\frac{2}{a^3}\right)$$

נשווה את הנגזרת ל- 0: $F'(a)=0 \;\Rightarrow\; 4\left(2a-\frac{2}{a^3}\right)=0$

$$2a-\frac{2}{a^3}=0 \quad / :2 \;,\; \cdot a^3$$

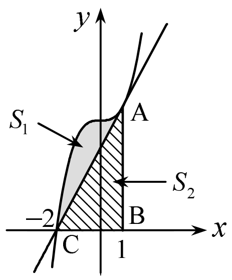
$$a^4-1=0 \;\Rightarrow\; a^4=1 \;\Rightarrow\; a=\pm 1$$

אבל $a>0$, לכן: $a=1$.

$$F''(a)=4\left(2+\frac{6}{a^4}\right) \;\Rightarrow\; F''(1)=4(2+6)>0 \;\Rightarrow\; \min$$

כלומר, BC^2 מינימלי כאשר $a=1$.

(9) $f'(x)=ax^2$



משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה $x=1$:

$$y=6x+12$$

(א) בנקודת ההשקה: $y=6\cdot 1+12=18$

נקודת ההשקה היא: $A(1,18)$.

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int ax^2\,dx=\frac{ax^3}{3}+c$$

$$\begin{cases} f'(1)=6 \\ f(1)=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ \frac{a}{3}+c=18 \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{3}+c=18 \;\Rightarrow\; c=16$$

$$f(x)=2x^3+16$$

(ב) נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x:

$$y=0 \;\Rightarrow\; 2x^3+16=0 \;\Rightarrow\; x^3=-8 \;\Rightarrow\; x=-2 \;\Rightarrow\; (-2,0)$$

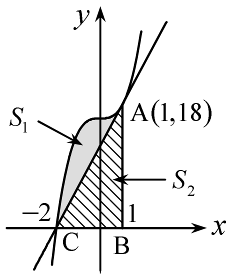
נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x:

$$y=0 \;\Rightarrow\; 6x+12=0 \;\Rightarrow\; x=-2 \;\Rightarrow\; (-2,0)$$

המשך בעמוד הבא >>>

לכן, גרף הפונקציה והמשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=1$,
חותכים את ציר ה- x באותה הנקודה ששיעוריה $(-2,0)$
(נקודה C בסרטוט).

(ג)



$$S_2 = S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{(y_A - y_B)\cdot(x_B - x_C)}{2} =$$

$$= \frac{18 \cdot 3}{2} = \text{27 יחידות שטח}$$

$$S_1 = \int_{-2}^{1} \left(2x^3 + 16 - (6x+12)\right)dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(2x^3 - 6x + 4\right)dx =$$

$$= 2\int_{-2}^{1} \left(x^3 - 3x + 2\right)dx = 2\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - (4 - 6 - 4)\right) = 2\left(\frac{3}{4} + 6\right) = \text{13.5 יחידות שטח}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{13.5}{27} = \frac{1}{2}$$

דרך נוספת:

$$S_1 + S_2 = \int_{-2}^{1} (2x^3 + 16)dx = \left(\frac{x^4}{2} + 16x\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2} + 16 - (8 - 32) = \text{40}\tfrac{1}{2}\text{ יחידות שטח}$$

$$S_1 = 40\tfrac{1}{2} - 27 = \text{13.5 יחידות שטח}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{13.5}{27} = \frac{1}{2}$$

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות