

פתרון מבחן מס' 30 (ספר לימוד – שאלון 035803)

09-05-2017

$$y_A = 4 \Rightarrow x^2 + 4^2 = 25 \quad (א) \quad (1)$$

$$x^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3$$

הנקודה A נמצאת ברביע השני, לכן $x_A = -3$.

(ב) $A(-3, 4)$ ומרכז המעגל $O(0, 0)$.

$$m_{AO} = \frac{4-0}{-3-0} = -\frac{4}{3}$$

משיק מאונך לרדיוס בקצהו, לכן: משיק ב-A $AO \perp A$.

$$m_{\text{משיק ב-A}} = \frac{3}{4} \quad \text{לכן: משיק ב-A מאונכים שווה ל-1, לכן:}$$

$$y - 4 = \frac{3}{4}(x + 3) \quad \text{משוואת המשיק:}$$

$$y - 4 = \frac{3}{4}x + 2\frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4}$$

$$y_B = 0 \Rightarrow 0 = \frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{-6\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = -8\frac{1}{3} \quad (ג)$$

$$AO = R = 5 \text{ יחידות אורך}$$

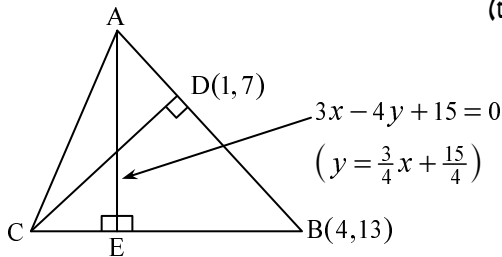
$$BO = x_O - x_B = 0 - \left(-8\frac{1}{3}\right) = 8\frac{1}{3} \text{ יחידות אורך}$$

לפי משפט פיתגורס ב- $\triangle AOB$ ($\sphericalangle A = 90^\circ$):

$$AO^2 + AB^2 = BO^2 \Rightarrow 5^2 + AB^2 = \left(8\frac{1}{3}\right)^2$$

$$25 + AB^2 = 69\frac{4}{9} \Rightarrow AB = \sqrt{69\frac{4}{9} - 25} = 6\frac{2}{3} \text{ יחידות אורך}$$

$$P_{\triangle AOB} = 5 + 8\frac{1}{3} + 6\frac{2}{3} = 20 \text{ יחידות אורך}$$



(2) (א) נוסף סרטוט (לא במערכת צירים)

$$m_{AB} = m_{BD} = \frac{13-7}{4-1} = 2$$

ומכפלת שיפועי $AB \perp CD$,

ישרים מאונכים שווה ל-1,

לכן: $m_{CD} = -\frac{1}{2}$.

משוואת הגובה CD: $y - 7 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 7\frac{1}{2}$

משוואת AB: $y - 13 = 2(x - 4) \Rightarrow y = 2x + 5$ (ב)

למצוא את שיעורי הנקודה A נפתור מערכת משוואות:

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ 3x - 4y + 15 = 0 \Rightarrow 3x - 4(2x + 5) + 15 = 0 \end{cases}$$

$$3x - 8x - 20 + 15 = 0 \Rightarrow -5x = 5 \Rightarrow x = -1$$

$$y = 2 \cdot (-1) + 5 = 3 \Rightarrow A(-1, 3)$$

שיפוע הישר AE הוא: $m_{AE} = \frac{3}{4}$ לכן שיפוע הישר BC המאונך לו

הוא $m_{BC} = -\frac{4}{3}$, כי מכפלת שיפועי ישרים מאונכים שווה ל-1.

משוואת BC: $y - 13 = -\frac{4}{3}(x - 4) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + 18\frac{1}{3}$

למצוא את שיעורי הנקודה C נפתור מערכת משוואות:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 7\frac{1}{2} \\ y = -\frac{4}{3}x + 18\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}x + 7\frac{1}{2} = -\frac{4}{3}x + 18\frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{6}x = 10\frac{5}{6} \Rightarrow x = 13$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 13 + 7\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow C(13, 1)$$

(3) נסמן ב- x את מספר המטיילים מעבר ל- 50 המטיילים הראשונים.

הקבוצה מונה בסך הכול $50 + x$ מטיילים.

כל מטייל משלם: $650 - 20x$ ש"ח.

מהנתון בשאלה נקבל את המשוואה: $(50 + x)(650 - 20x) = 27,000$

$$32,500 - 1,000x + 650x - 20x^2 = 27,000$$

$$0 = 20x^2 + 350x - 5,500 \quad /:10 \Rightarrow 0 = 2x^2 + 35x - 550$$

$$x_{1,2} = \frac{-35 \pm \sqrt{35^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-550)}}{4} = \frac{-35 \pm 75}{4} \Rightarrow x_1 = 10, x_2 = -55$$

x הוא מספר שלם ולא שלילי, לכן $x = 10$, כלומר בקבוצה היו

60 מטיילים $= 50 + 10$.

(4) (א) תחום הגדרה: $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$$f'(x) = 16 \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) + 2x = -\frac{32}{x^3} + 2x \quad \text{(ב) + (ג)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{32}{x^3} + 2x = 0 \quad / \cdot x^3$$

$$-32 + 2x^4 = 0 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{16}{2^2} + 2^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow (2, 8)$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{16}{(-2)^2} + (-2)^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow (-2, 8)$$

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	-	0	+	נקודת אי- הגדרה	-	0	+
$f(x)$	\searrow	min	\nearrow		\searrow	min	\nearrow

$$f'(-3) = -\frac{32}{(-3)^3} + 2 \cdot (-3) = -4 \frac{22}{27} < 0$$

$$f'(-1) = -\frac{32}{(-1)^3} + 2 \cdot (-1) = 32 - 2 > 0$$

◀◀◀ המשך בעמוד הבא

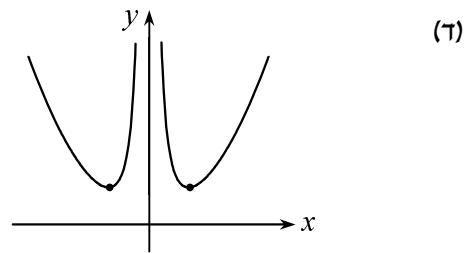
$$f'(1) = -\frac{32}{1^3} + 2 \cdot 1 = -32 + 2 < 0$$

$$f'(3) = -\frac{32}{3^3} + 2 \cdot 3 = 4\frac{22}{27} > 0$$

כלומר נקודות הקיצון הן: $\min(2, 8)$, $\min(-2, 8)$

תחומי עלייה: $-2 < x < 0$, $x > 2$

תחומי ירידה: $x < -2$, $0 < x < 2$



$$\int_0^1 (x^4 + 2ax^3 + a^2x^2) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2ax^4}{4} + \frac{a^2x^3}{3} \Big|_0^1 = \quad (5)$$

$$= \left(\frac{1^5}{5} + \frac{2a \cdot 1^4}{4} + \frac{a^2 \cdot 1^3}{3} \right) - 0 = \frac{1}{5} + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3}$$

$$f(a) = \frac{a^2}{3} + \frac{a}{2} + \frac{1}{5} \quad \text{נסמן:}$$

$$f'(a) = \frac{2a}{3} + \frac{1}{2}$$

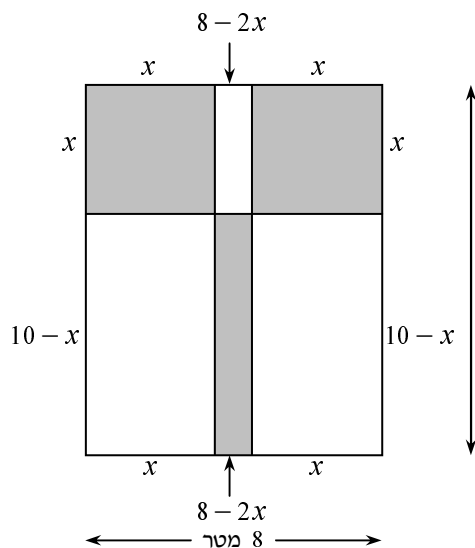
$$f'(a) = 0 \Rightarrow \frac{2a}{3} + \frac{1}{2} = 0 \quad / \cdot 6$$

$$4a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

נבדוק שעבור $a = -\frac{3}{4}$ ערך האינטגרל מינימלי:

$$f''(a) = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow \min$$

תשובה: הערך של האינטגרל המסוים מינימלי כאשר $a = -\frac{3}{4}$.



(6) (א) לפנינו שאלה מילולית של ערך קיצון (בעיית מינימום), שפונקציית המטרה (מה שרוצים שיהיה מינימלי), היא המחיר הכולל של הזכוכית בחלון. תחום ההגדרה של x : $0 < x < 4$ מטר.

$$f(x) = \underbrace{75}_{\substack{\text{מחיר מ"ר} \\ \text{זכוכית צבעונית}}} \cdot \left[\underbrace{x^2 + x^2}_{\substack{\text{סכום שטחי הריבועים}}} + \underbrace{(10-x)(8-2x)}_{\substack{\text{שטח הזכוכית} \\ \text{הצבעונית המלבנית}}} \right] +$$

$$+ \underbrace{25}_{\substack{\text{מחיר מ"ר} \\ \text{זכוכית שקופה}}} \cdot \left[\underbrace{x(10-x) + x(10-x)}_{\substack{\text{סכום שטחי שני המלבנים} \\ \text{הגדולים של הזכוכית השקופה}}} + \underbrace{x(8-2x)}_{\substack{\text{שטח הזכוכית} \\ \text{השקופה הנוספת}}} \right]$$

$$f(x) = 75(2x^2 + 80 - 20x - 8x + 2x^2) +$$

$$+ 25(10x - x^2 + 10x - x^2 + 8x - 2x^2)$$

$$f(x) = 75(4x^2 - 28x + 80) + 25(-4x^2 + 28x)$$

$$f(x) = 300x^2 - 2,100x + 6,000 - 100x^2 + 700x$$

$$f(x) = 200x^2 - 1,400x + 6,000$$

$$f'(x) = 400x - 1,400 = 0 \Rightarrow x = 3.5$$

$$f''(x) = 400 > 0 \Rightarrow \min : f''(x)$$

תשובה: כדי שהמחיר הכולל של הזכוכית יהיה מינימלי,

גודלו של x צריך להיות 3.5 מטר.

$$f_{\min} = f(3.5) = 200 \cdot 3.5^2 - 1,400 \cdot 3.5 + 6,000 = 3,550 \text{ ש"ח} \quad (\text{ב})$$

גבי יקואל

מ ש ב צ ת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות