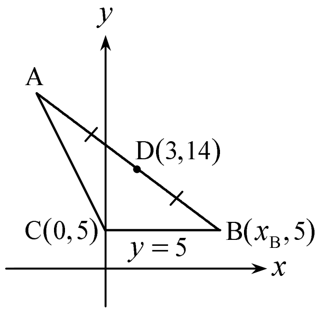
פתרון מבחן מס׳ 20 (ספר לימוד – שאלון 035803)

09-05-2017



(1) (א) (*i*) נתון: $y_B = y_C = 5$, $BC = BD$.

הנקודה C נמצאת על ציר ה- y ,

לכן $x_C = 0$ ואז: $C(0,5)$.

(*ii*) נסמן: $B(x_B,5)$.

מהנתון $BC = BD$

נקבל: $BC^2 = BD^2$, כלומר:

$$(x_B - 0)^2 + (5-5)^2 = (x_B - 3)^2 + (5-14)^2$$

$$x_B{}^2 = x_B{}^2 - 6x_B + 9 + 81$$

$$6x_B = 90 \;\; \Rightarrow \;\; x_B = 15 \;\; \Rightarrow \;\; B(15,5)$$

(ב) D היא נקודת אמצע הקטע AB , ולכן:

$$3 = \frac{x_A + 15}{2} \;\; \Rightarrow \;\; x_A = 6 - 15 = -9$$

$$14 = \frac{y_A + 5}{2} \;\; \Rightarrow \;\; y_A = 28 - 5 = 23$$

כלומר: $A(-9,23)$.

(ג) BC מקביל לציר ה- x , לכן הגובה לצלע BC מקביל לציר ה- y ,

ואורכו: $h = y_A - y_C = 23 - 5 = 18$ יחידות אורך

(2) נסמן ב- x ס״מ את אורך צלע הבסיס,

ואז $(x-3)$ ס״מ יסמן את גובה התיבה.

נתון ששטח הפח (סכום שטחי ארבע פאות צדדיות ובסיס אחד)

הוא 224 סמ״ר, לכן:

$$x^2 + 4 \cdot x \cdot (x-3) = 224$$

$$x^2 + 4x^2 - 12x - 224 = 0$$

$$5x^2 - 12x - 224 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-224)}}{10} = \frac{12 \pm 68}{10} \;\; \Rightarrow \;\; x_1 = 8 \; , \; x_2 = -5.6$$

הפתרון $x_2 = -5.6$ נפסל כי אורך צלע הבסיס הוא גודל חיובי.

תשובה: אורך צלע הבסיס הוא 8 ס״מ.

(3) נסמן ב- x את מספר השקיות שקנה הסוחר,

ואז $\frac{1,080}{x}$ ש״ח יסמן את מחיר הקנייה של כל שקית,

$(x+200)$ יסמן את מספר השקיות הקטנות,

ו- $\left(\frac{1,080}{x}+0.16\right)$ ש״ח יסמן את מחיר המכירה של כל שקית קטנה.

על-פי הנתונים בשאלה נרכיב את המשוואה :

$$\left(x+200\right)\left(\frac{1,080}{x}+0.16\right)=1,080+416$$

$$1,080+0.16x+\frac{216,000}{x}+32=1,080+416 \quad / \cdot x$$

$$0.16x^2+216,000+32x=416x$$

$$0.16x^2-384x+216,000=0$$

$$x_{1,2}=\frac{384\pm\sqrt{384^2-4\cdot 0.16\cdot 216,000}}{0.32}=\frac{384\pm 96}{0.32}$$

$$x_1=1,500 \ , \ x_2=900$$

שני הפתרונות חיוביים ושלמים, ולכן מתאימים לתנאי השאלה.

תשובה: הסוחר קנה 900 שקיות או 1,500 שקיות.

(4) (א)

$$f(x)=(2x-x^2)^2=4x^2-4x^3+x^4$$

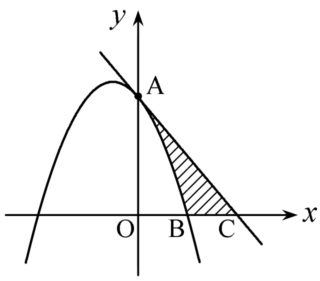
$$f'(x)=8x-12x^2+4x^3=4(x^3-3x^2+2x)$$

(ב)

$$\int_{-2}^{1}(x^3-3x^2+2x)\,dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{1}4(x^3-3x^2+2x)\,dx \underset{\text{לפי סעיף א׳}}{=}$$

$$=\frac{1}{4}\left[(2x-x^2)^2\right]\Big|_{-2}^{1}=\frac{1}{4}\left[(2\cdot 1-1^2)^2-[2\cdot(-2)-(-2)^2]^2\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[(2-1)^2-(-4-4)^2\right]=\frac{1}{4}\left(1^2-8^2\right)=\frac{1-64}{4}=-\frac{63}{4}=-15\frac{3}{4}$$



(5) (א) $x=0 \;\Rightarrow\; y=18 \;\Rightarrow\; \mathrm{A}(0,18)$

$y'=-2x-3$

$y'(0)=-3$

משוואת המשיק: $y-18=-3(x-0)$

כלומר: $y=-3x+18$

(ב) $y_{\mathrm{C}}=0 \;\Rightarrow\; 0=-3x+18 \;\Rightarrow\; 3x=18 \;\Rightarrow\; x_{\mathrm{C}}=6$

$S_{\Delta \mathrm{AOC}}=\frac{y_{\mathrm{A}}\cdot x_{\mathrm{C}}}{2}=\frac{18\cdot 6}{2}=$ 54 יחידות שטח

את השטח המבוקש נחשב כהפרש בין שטח $\Delta\,\mathrm{AOC}$ לשטח שמתחת לפרבולה ומעל לציר ה- x , בגבולות $x=0$ עד $x=x_{\mathrm{B}}$.

$y_{\mathrm{B}}=0 \;\Rightarrow\; 0=-x^2-3x+18$

$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{-2}=\frac{3\pm 9}{-2} \;\Rightarrow\; x_1=-6\;,\; x_2=3$

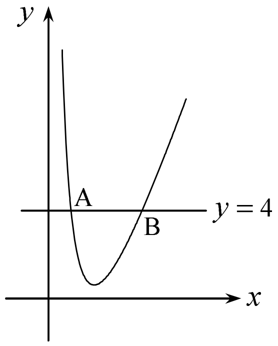
כלומר $x_{\mathrm{B}}=3$, ואז:

$$S_{\text{מבוקש}}=S_{\Delta \mathrm{AOC}}-\int_0^3(-x^2-3x+18)\,dx=$$

$$=54-\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+18x\right)\Big|_0^3=$$

$$=54-\left(-\frac{3^3}{3}-\frac{3\cdot 3^2}{2}+18\cdot 3\right)=$$

$=54-\left(-9-13\frac{1}{2}+54\right)=$ $22\frac{1}{2}$ יחידות שטח



(6) $y = 6x + \frac{1}{2x}$ $(x > 0)$

נמצא את שיעורי הנקודות A ו- B.

$$y_A = y_B = 4 \;\Rightarrow\; 4 = 6x + \frac{1}{2x} \quad / \cdot 2x$$

$$8x = 12x^2 + 1 \;\Rightarrow\; 12x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{24} = \frac{8 \pm 4}{24}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \;,\; x_2 = \frac{1}{6}$$

כלומר: $B\left(\frac{1}{2}, 4\right)$, $A\left(\frac{1}{6}, 4\right)$.

$$y' = 6 - \frac{1}{2x^2}$$

נמצא את שיפועי המשיקים בנקודות A ו- B:

$$m_A = y'\left(\frac{1}{6}\right) = 6 - \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2} = 6 - 18 = -12$$

$$m_B = y'\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 6 - 2 = 4$$

משוואת המשיק בנקודה $A\left(\frac{1}{6}, 4\right)$ ששיפועו $m = -12$:

$$y - 4 = -12\left(x - \frac{1}{6}\right) \;\Rightarrow\; y - 4 = -12x + 2 \;\Rightarrow\; y = -12x + 6$$

משוואת המשיק בנקודה $B\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ ששיפועו $m = 4$:

$$y - 4 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right) \;\Rightarrow\; y - 4 = 4x - 2 \;\Rightarrow\; y = 4x + 2$$

P היא נקודת החיתוך של שני המשיקים, לכן:

$$\begin{cases} y = -12x + 6 \\ y = 4x + 2 \end{cases} \;\Rightarrow\; 4x + 2 = -12x + 6 \;\Rightarrow\; 16x = 4$$

$$x = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; y = 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 = 3 \;\Rightarrow\; P\left(\frac{1}{4}, 3\right)$$

גבי יקואל