

פתרון מבחן מס' 13 (ספר לימוד – שאלון 035803)

09-05-2017

(1) (א) למציאת שיעור ה- y של מרכז המעגל נציב $x = a$

במשוואת הישר $y = x + 3$ ונקבל $y = a + 3$.

(ב) משוואת המעגל שמרכזו $M(a, a + 3)$ ורדיוסו $\sqrt{18}$ היא:

$$(x - a)^2 + [y - (a + 3)]^2 = 18$$

למציאת ערכו של a נייעזר בנתון שהמעגל עובר בנקודה $A(-2, 7)$.

$$(-2 - a)^2 + [7 - (a + 3)]^2 = 18$$

נקבל:

$$4 + 4a + a^2 + (4 - a)^2 = 18$$

$$2a^2 - 4a + 2 = 0 \quad / : 2$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

כלומר $a = 1$ ואז $M(1, 1 + 3) = M(1, 4)$.

(ג) משוואת המעגל (נציב $a = 1$) היא: $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 18$

נציב $x = 4$ ונקבל את שיעורי ה- y של הנקודות B ו-C.

$$(4 - 1)^2 + (y - 4)^2 = 18$$

$$9 + (y - 4)^2 = 18 \Rightarrow (y - 4)^2 = 9$$

$$y - 4 = 3 \quad \text{או} \quad y - 4 = -3$$

$$y_1 = 7, \quad y_2 = 1$$

כלומר, שיעורי ה- y של נקודות B ו-C הן 1 ו-7.

(ד) נתאר סרטוט של המעגל.

נניח $B(4, 1)$, $C(4, 7)$.

$$S_{\Delta MBC} = \frac{BC \cdot (\text{הגובה מ-M ל-BC})}{2}$$

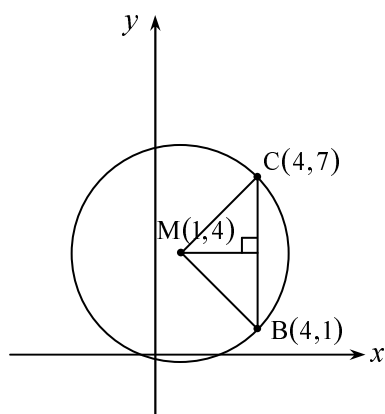
$$BC = 7 - 1 = 6 \quad \text{יחידות אורך}$$

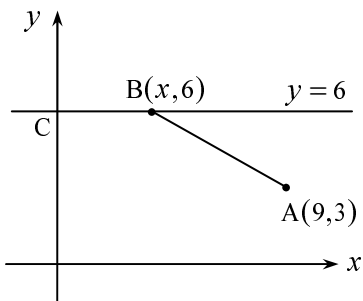
הגובה מ-M ל-BC:

$$x_B - x_M = 4 - 1 = 3 \quad \text{יחידות אורך}$$

לכן:

$$S_{\Delta MBC} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 \quad \text{יחידות שטח}$$





(2) נתאר סרטוט של הנתונים.

נתון: $A(9,3)$, $B(x,6)$.

המרחק מנקודה B לציר ה-y

הוא אורך הקטע BC .

כלומר נתון נוסף:

$$BC = AB$$

$$x \text{ יחידות אורך} = BC = x_B - x_C = x - 0 = x$$

$$AB = \sqrt{(x-9)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{x^2 - 18x + 81 + 9} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 18x + 90} \text{ יחידות אורך}$$

$$x = \sqrt{x^2 - 18x + 90} / ()^2 \text{ מהנתון } BC = AB \text{ נקבל את המשוואה:}$$

$$x^2 = x^2 - 18x + 90 \Rightarrow 18x = 90 \Rightarrow x = 5$$

כלומר: $B(5,6)$.

(3) (א) נסמן ב-x ש"ח את המחיר המקורי של כיסא ואז $3x$ ש"ח יסמן את

המחיר המקורי של שולחן.

לאחר הנחה של 12% מחיר כל שולחן:

$$\frac{100-12}{100} \cdot 3x = 0.88 \cdot 3x = \text{ש"ח } 2.64x$$

$$\frac{100-15}{100} \cdot x = \text{ש"ח } 0.85x \text{ לאחר הנחה של 15% מחיר כל כיסא:}$$

מהנתון שעבור 5 שולחנות ו-20 כיסאות שילם הסוחר 12,080 ש"ח,

$$5 \cdot 2.64x + 20 \cdot 0.85x = 12,080 \text{ נקבל את המשוואה:}$$

$$13.2x + 17x = 12,080 \Rightarrow 30.2x = 12,080 \Rightarrow x = 400$$

כלומר המחיר המקורי של כיסא הוא 400 ש"ח.

$$3 \cdot 400 = \text{ש"ח } 1,200 \text{ ושל שולחן}$$

(ב) ללא ההנחה עבור הסחורה הסוחר היה משלם:

$$5 \cdot \underbrace{3x}_{\substack{\text{מחיר} \\ \text{שולחן} \\ \text{ללא הנחה}}} + 20 \cdot \underbrace{x}_{\substack{\text{מחיר} \\ \text{כיסא} \\ \text{ללא הנחה}}} = 15x + 20x = 35x = 35 \cdot 400 = \text{ש"ח } 14,000$$

$$14,000 - 12,080 = \text{ש"ח } 1,920 \text{ כלומר, הסוחר קיבל הנחה של:}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 36x \quad (4) \quad (א) + (ד)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 - 24x^2 - 36x = 0$$

$$12x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ או } x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_2 = 3, x_3 = -1$$

$$f(0) = 48, f(3) = 3 \cdot 3^4 - 8 \cdot 3^3 - 18 \cdot 3^2 + 48 = -87$$

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^3 - 18 \cdot (-1)^2 + 48 = 41$$

$$f''(x) = 36x^2 - 48x - 36$$

$$f''(0) = -36 < 0 \Rightarrow \max(0, 48)$$

$$f''(3) = 36 \cdot 3^2 - 48 \cdot 3 - 36 > 0 \Rightarrow \min(3, -87)$$

$$f''(-1) = 36 \cdot (-1)^2 - 48 \cdot (-1) - 36 > 0 \Rightarrow \min(-1, 41)$$

נמצא בנוסף את נקודות קצה הקטע הסגור.

$$f(-2) = 3 \cdot (-2)^4 - 8 \cdot (-2)^3 - 18 \cdot (-2)^2 + 48 =$$

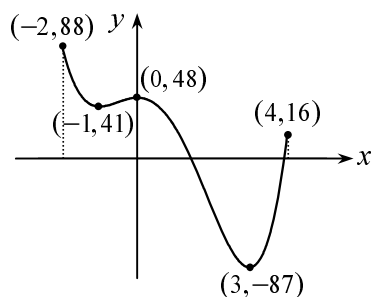
$$= 3 \cdot 16 - 8 \cdot (-8) - 18 \cdot 4 + 48 = 88$$

$$f(4) = 3 \cdot 4^4 - 8 \cdot 4^3 - 18 \cdot 4^2 + 48 =$$

$$= 3 \cdot 256 - 8 \cdot 64 - 18 \cdot 16 + 48 = 16$$

כלומר נקודות הקצה: $(-2, 88)$, $(4, 16)$.

נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה בעזרת הנקודות שמצאנו.



מתוך הסרטוט נסיק גם כי נקודות הקיצון בקצוות הן:

$$\max(-2, 88), \max(4, 16)$$

(ב) מתוך הסרטוט נסיק כי המקסימום המוחלט מתקבל בנקודה $(-2, 88)$

והמינימום המוחלט בנקודה $(3, -87)$.

המשך בעמוד הבא <<<

(ג) מסעיפים קודמים נסיק כי תחומי העלייה של הפונקציה:

$$. 3 < x \leq 4, -1 < x < 0$$

$$. 0 < x < 3, -2 \leq x < -1$$

(5) למציאת שיעור ה- x של נקודה C נציב $y = 0$ במשוואה $y = (x - 6)^2$.
ונקבל: $0 = (x - 6)^2 \Rightarrow x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

כלומר: $C(6, 0)$.

AB מקביל לציר ה- x ונתון $A(0, 9)$ לכן משוואת AB היא $y = 9$.

נעלה אנך מנקודה C לציר ה- x .

המשך AB חותך את האנך בנקודה E.

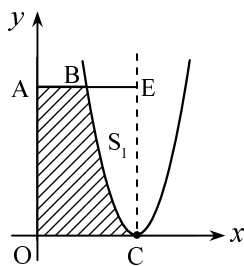
$$x_C = x_E = 6$$

$$y_E = y_A = 9$$

לכן: $E(6, 9)$.

את השטח המבוקש נחשב כהפרש בין שטח מלבן

AECO ל- S_1 .



$$S_{AECO} = AO \cdot OC = 9 \cdot 6 = 54 \text{ יחידות שטח}$$

למציאת שיעור ה- x של נקודה B נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} y = 9 \\ y = (x - 6)^2 \end{cases} \Rightarrow 9 = (x - 6)^2 \Rightarrow 3 = x - 6 \text{ או } -3 = x - 6$$

כלומר: $x = 9$ או $x = 3$.

הפתרון שמתאים לנקודה B הוא $x_B = 3$ לכן:

$$S_1 = \int_3^6 [9 - (x - 6)^2] dx = \int_3^6 [9 - (x^2 - 12x + 36)] dx =$$

$$= \int_3^6 (-x^2 + 12x - 27) dx = -\frac{x^3}{3} + 6x^2 - 27x \Big|_3^6 =$$

$$= \left(-\frac{6^3}{3} + 6 \cdot 6^2 - 27 \cdot 6\right) - \left(-\frac{3^3}{3} + 6 \cdot 3^2 - 27 \cdot 3\right) =$$

$$= \left(-\frac{216}{3} + 216 - 162\right) - (-9 + 54 - 81) =$$

$$= -18 - (-36) = 18 \text{ יחידות שטח}$$

$$S_{\text{מבוקש}} = 54 - 18 = 36 \text{ יחידות שטח}$$

מכאן:

(6) נסמן ב- t של שיעור ה- x של נקודות A ו-B ,
 ואז $A(t, 4\sqrt{t})$, $B(t, t^2 + 6)$.

$$AB = f(t) = y_B - y_A = t^2 + 6 - 4\sqrt{t}$$

$$f'(t) = 2t - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = 2t - \frac{2}{\sqrt{t}}$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 2t - \frac{2}{\sqrt{t}} = 0 \quad / \cdot \frac{\sqrt{t}}{2}$$

$$t\sqrt{t} - 1 = 0 \Rightarrow t\sqrt{t} = 1 \quad / ()^2 \Rightarrow t^2 \cdot t = 1 \Rightarrow t^3 = 1 \Rightarrow t = 1$$

נבדוק שעבור $t = 1$ אורך הקטע AB הוא מינימלי.

x	$0 < t < 1$	$t = 1$	$t > 1$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}} < 0$$

$$f'(4) = 2 \cdot 4 - \frac{2}{\sqrt{4}} > 0$$

לכן, עבור $t = 1$, כלומר כאשר משוואת ישר AB היא $x = 1$,
 אורך הקטע AB הוא מינימלי.

גבי יקואל

מ ש ב צ ת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות