פתרון מבחן מס' 11 (ספר לימוד – שאלון 035803)

09-05-2017

(1) (א) מכיוון ש- $BC \perp AB$ הרי שמכפלת שיפועי הצלעות AB ו- BC שווה ל- -1 .

ממשוואת AB : $y = 3x - 6$ נסיק כי שיפוע הצלע AB הוא 3 .

ומכאן שיפוע BC הוא: $m_{BC} = -\frac{1}{3}$.

(ב) קדקוד B מונח על ציר ה- x ולכן שיעור ה- y של קדקוד B הוא 0 .

למציאת שיעור ה- x של קדקוד B נציב $y = 0$ במשוואת הצלע AB :

$$y = 3x - 6$$

$$0 = 3x - 6 \;\Rightarrow\; 6 = 3x \;\Rightarrow\; x = 2$$

כלומר $B(2,0)$.

נמצא את משוואת הצלע BC לפי נקודה $B(2,0)$

ושיפוע של BC , $m_{BC} = -\frac{1}{3}$:

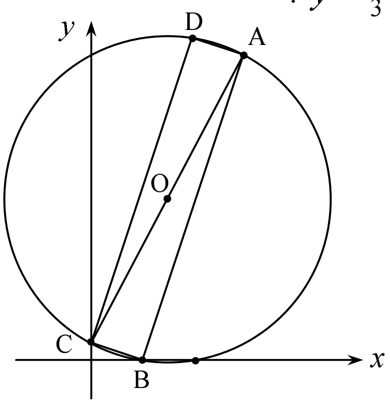
$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

למציאת שיעור ה- y של נקודה C נציב $x = 0$

(כי קדקוד C מונח על ציר ה- y). ונקבל: $y = \frac{2}{3}$.

כלומר $C\left(0, \frac{2}{3}\right)$.



(ג) נתון ששיעור ה- x של קדקוד A הוא 6 .

למציאת שיעור ה- y של קדקוד A

נציב $x = 6$ במשוואת AB ונקבל:

$$y = 3 \cdot 6 - 6 = 12$$

כלומר $A(6,12)$.

נמצא את מרכז המעגל O הנמצא

באמצע הקוטר AC .

$A(6,12)$, $C\left(0, \frac{2}{3}\right)$ לכן: $O\left(\frac{0+6}{2}, \frac{\frac{2}{3}+12}{2}\right) = O\left(3, 6\frac{1}{3}\right)$.

רדיוס המעגל הוא אורך OC כאשר $O\left(3, 6\frac{1}{3}\right)$, $C\left(0, \frac{2}{3}\right)$.

$$OC = \sqrt{(3-0)^2 + \left(6\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{41\frac{1}{9}}$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

כלומר משוואת המעגל ש- AC הוא קוטר שלו :

$(x-3)^2+(y-6\tfrac{1}{3})^2=41\tfrac{1}{9}$

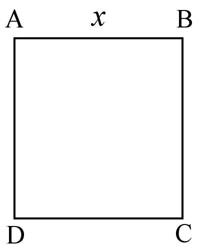
למציאת שיעורי ה- x של נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- x ,

נציב $y=0$ במשוואת המעגל ונקבל: $(x-3)^2+(0-6\tfrac{1}{3})^2=41\tfrac{1}{9}$

$(x-3)^2=1 \Rightarrow x-3=1$ או $x-3=-1$

$x_1=4\ ,\ x_2=2$

כלומר, נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- x הן : $(4,0)\ ,\ (2,0)$.



(2) נסמן ב- x ס"מ את אורך הצלע AB (וגם DC) .

מהנתון : $AB+BC=$ 12 ס"מ

נסיק כי : $BC=AD=$ $12-x$ ס"מ

אורך BC לאחר שהגדילו את אורך הצלע BC ב- 4 ס"מ הוא $16-x$ ס"מ.

ואורך AB לאחר שהקטינו את אורך AB ב- 25% הוא $\frac{100-25}{100}\cdot x=0.75x$.

שטח המלבן החדש :

$S_{\text{מלבן חדש}}=BC_{\text{חדש}}\cdot AB_{\text{חדש}}=(16-x)\cdot 0.75x=12x-0.75x^2$

מהנתון שהשטח של המלבן החדש הוא 36 סמ"ר נקבל את המשוואה :

$12x-0.75x^2=36\ /:0.75$

$16x-x^2=48 \Rightarrow x^2-16x+48=0$

$x_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{16^2-4\cdot 48}}{2}=\frac{16\pm 8}{2} \Rightarrow x_1=12\ ,\ x_2=4$

הפתרון $x=12$ נפסל כי אם $AB=$ 12 ס"מ , אז $BC=12-12=$ 0 ס"מ ואורך צלע צריך להיות חיובי.

תשובה: $AB=$ 4 ס"מ .

(3) נסמן ב- x ש״ח את המחיר המקורי של כרטיס למופע.

לאחר הנחת המבצע, בעבור 10 כרטיסים שקונים משלמים:

$$10 \cdot \frac{100-20}{100} \cdot x = 10 \cdot 0.8 \cdot x = 8x \text{ ש״ח}$$

לכן בעבור 38 כרטיסים למופע שבמבצע צריך לשלם:

$$\underbrace{3 \cdot 8x}_{\text{מחיר 30 כרטיסים לאחר הנחה} = 3 \cdot 10 \text{ כרטיסים}} + \underbrace{8x}_{\text{מחיר 8 כרטיסים נוספים ללא הנחה}} = \underbrace{2{,}400}_{\text{מחיר עבור 38 הכרטיסים (לפי הנתון)}}$$

$$24x + 8x = 2{,}400 \Rightarrow 32x = 2{,}400 \Rightarrow x = \frac{2{,}400}{32} = 75$$

תשובה: המחיר המקורי של כרטיס למופע הוא 75 ש״ח.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{x}{4}$. תחום הגדרה: $x \neq 0$.

(א)

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{4} = 0 \quad / \cdot 4x^2$$

$$-16 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x_1 = 4 \ , \ x_2 = -4$$

$$x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = 2 \quad , \quad x_2 = -4 \Rightarrow y_2 = -2$$

קיבלנו שתי נקודות חשודות לקיצון: $(-4,-2)$, $(4,2)$.

x	$x < -4$	$x = -4$	$-4 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$f'(x)$	+	0	−	נקודת אי-הגדרה	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘		↘	min	↗

$$f'(-5) = -\frac{4}{25} + \frac{1}{4} > 0 \qquad f'(-1) = -\frac{4}{1} + \frac{1}{4} < 0$$

$$f'(1) = -\frac{4}{1} + \frac{1}{4} < 0 \qquad f'(5) = -\frac{4}{25} + \frac{1}{4} > 0$$

תשובה: מינימום: $(4,2)$, מקסימום: $(-4,-2)$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

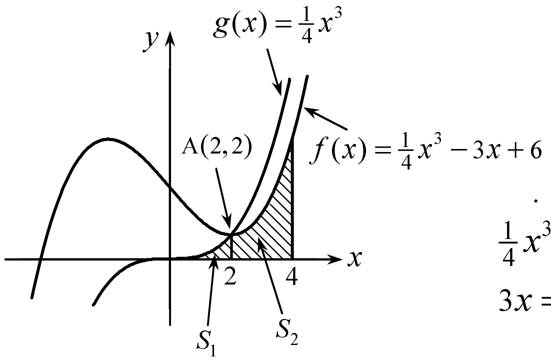
(ב) נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{x}{5}-\frac{5}{x}$. תחום הגדרה: $x\neq 0$.

$$g'(x)=\frac{1}{5}+\frac{5}{x^2}$$

$\frac{5}{x^2}>0$ לכל $x\neq 0$, מכאן: $\frac{1}{5}+\frac{5}{x^2}>0$ לכל $x\neq 0$,

לכן $g'(x)>0$ לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$,

לכן הפונקציה $g(x)$ עולה בכל תחום הגדרתה.



(5) (א) למציאת נקודת החיתוך בין הגרפים, נפתור את המשוואה: $f(x)=g(x)$.

$$\frac{1}{4}x^3-3x+6=\frac{1}{4}x^3$$

$$3x=6 \quad\Rightarrow\quad x=2$$

$$x=2 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{2^3}{4}=2$$

תשובה: $(2,2)$.

(ב) נחלק את השטח המבוקש לשני חלקים:

S_1 הוא השטח מתחת לגרף הפונקציה $g(x)$ בגבולות מ- 0 עד 2 ,

S_2 הוא השטח מתחת לגרף הפונקציה $f(x)$ בגבולות מ- 2 עד 4 .

$$S_1=\int_0^2 \frac{1}{4}x^3\,dx=\frac{x^4}{16}\Big|_0^2=\frac{2^4-0^4}{16}=\text{ 1 יחידת שטח}$$

$$S_2=\int_2^4\left(\frac{1}{4}x^3-3x+6\right)dx=\left(\frac{x^4}{16}-\frac{3x^2}{2}+6x\right)\Big|_2^4=$$

$$=\frac{4^4-2^4}{16}-\frac{3}{2}\left(4^2-2^2\right)+6\cdot\left(4-2\right)=$$

$$=\frac{240}{16}-\frac{3}{2}\cdot 12+6\cdot 2=15-18+12=\text{ 9 יחידות שטח}$$

$$S_{\text{מקווקו}}=S_1+S_2=1+9=\text{ 10 יחידות שטח}$$

(6) (א) נסמן: $x_B = t$, ואז: $A\left(0,2\frac{1}{4}\right)$, $B\left(t,2t^2\right)$

$$AB^2 = \left(t-0\right)^2 + \left(2t^2 - 2\frac{1}{4}\right)^2$$

$$AB^2 = t^2 + 4t^4 - 9t^2 + \frac{81}{16} = 4t^4 - 8t^2 + \frac{81}{16}$$

(ב) נסמן: $f(t) = AB^2$, כלומר: $f(t) = 4t^4 - 8t^2 + \frac{81}{16}$

$$f'(t) = 16t^3 - 16t$$

$$f'(t) = 0 \;\Rightarrow\; 16t^3 - 16t = 0 \;\Rightarrow\; 16t(t^2-1) = 0$$

$$t_1 = 0 \;,\; t_2 = 1 \;,\; t_3 = -1$$

$$f''(t) = 48t^2 - 16$$

$$f''(0) = -16 < 0 \;\Rightarrow\; \max$$

$$f''(1) = 48 - 16 > 0 \;\Rightarrow\; \min$$

$$f''(-1) = 48 - 16 > 0 \;\Rightarrow\; \min$$

מכיוון שנתון ש- B היא נקודה ברביע הראשון, הרי ש- $B(1,2)$.

תשובה: עבור $B(1,2)$ ריבוע המרחק AB יהיה מינימלי.

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות