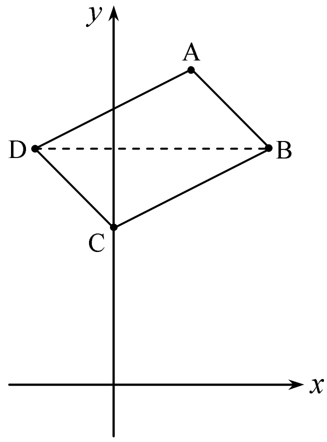
פתרון מבחן מס' 4 (ספר לימוד – שאלון 035803)

09-05-2017



(1) משוואת AD : $y=\frac{1}{2}x+7$

משוואת DC : $y=-x+4$

(א) $x_C=0 \Rightarrow y_C=-0+4=4$

כלומר: $C(0,4)$.

(ב) $BC \parallel AD$ צלעות נגדיות במקבילית מקבילות.

$m_{BC}=m_{AD}$ לישרים מקבילים יש אותו שיפוע.

כלומר השיפוע של BC הוא $\frac{1}{2}$.

משוואת BC העובר דרך $C(0,4)$ ושיפועו $m=\frac{1}{2}$:

$$y-4=\frac{1}{2}(x-0) \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+4$$

(ג) DB מקביל לציר ה- x לכן משוואתו $y=y_D$.

נמצא את שיעורי נקודה D כחיתוך של הישרים AD ו- DC :

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+7 \\ y=-x+4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x+7=-x+4 \Rightarrow 1\frac{1}{2}x=-3 \Rightarrow x=-2$$

$$x=-2 \Rightarrow y=2+4=6 \Rightarrow D(-2,6)$$

$$y_D=6 \Rightarrow y_B=6 \Rightarrow 6=\frac{1}{2}x_B+4 \Rightarrow x_B=4$$

כלומר: $D(-2,6)$, $B(4,6)$.

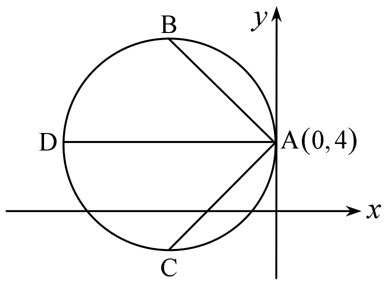
במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה ולכן נקודת חיתוך האלכסונים M היא אמצע הקטע BD :

$$x_M=\frac{4-2}{2}=1 \ , \ y_M=\frac{6+6}{2}=6$$

כלומר: $M(1,6)$.

(2) (א) (i) משוואת המעגל: $(x-\mathrm{a})^2+(y-4)^2=(\mathrm{a}+10)^2$.

מרכז המעגל $\mathrm{M}(\mathrm{a},4)$ ($\mathrm{a}<0$), רדיוס המעגל $|\mathrm{a}+10|$.



נתון כי המעגל משיק לציר ה- y .

כלומר: $x_{\mathrm{M}}=-\mathrm{R}$

כלומר: $-\mathrm{a}=|\mathrm{a}+10|$.

$-\mathrm{a}=\mathrm{a}+10$

או $-\mathrm{a}=-(\mathrm{a}+10)$

לכן: $\mathrm{a}=-5$

(ii) משוואת המעגל: $(x+5)^2+(y-4)^2=25$

(ב) משוואת AB : $\mathrm{m}_{\mathrm{AB}}=-1 \Rightarrow y-4=-1(x-0) \Rightarrow y=-x+4$

משוואת AC : $\mathrm{m}_{\mathrm{AC}}=1 \Rightarrow y-4=1(x-0) \Rightarrow y=x+4$

משוואת AD : $\mathrm{m}_{\mathrm{AD}}=0 \Rightarrow y-4=0 \Rightarrow y=4$

C נקודת החיתוך של המעגל עם הישר AC .

$$\begin{cases} y=x+4 \\ (x+5)^2+(y-4)^2=25 \end{cases} \Rightarrow (x+5)^2+(x+4-4)^2=25$$

$$x^2+10x+25+x^2=25 \Rightarrow 2x^2+10x=0 \Rightarrow 2x(x+5)=0$$

$$x_1=0 \Rightarrow y_1=0+4=4 \ , \ x_2=-5 \Rightarrow y_2=-5+4=-1$$

כלומר: $\mathrm{C}(-5,-1)$.

B נקודת החיתוך של הישר AB עם המעגל.

$$\begin{cases} y=-x+4 \\ (x+5)^2+(y-4)^2=25 \end{cases} \Rightarrow (x+5)^2+(-x+4-4)^2=25$$

קיבלנו משוואה ריבועית שאותה פתרנו קודם.

$$x_1=0 \Rightarrow y_1=-0+4 \Rightarrow \mathrm{A}(0,4)$$

$$x_2=-5 \Rightarrow y_2=5+4=9 \Rightarrow \mathrm{B}(-5,9)$$

מציאת שיעורי נקודה D :

$$\begin{cases} y=4 \\ (x+5)^2+(y-4)^2=25 \end{cases}$$

$(x+5)^2+0^2=25 \Rightarrow$ $x+5=5$ או $x+5=-5$

$x_1=0 \Downarrow \mathrm{A}(0,4)$; $x_2=-10 \Downarrow \mathrm{D}(-10,4)$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ג) אם נקודת אמצע הקטע BC היא נקודת מרכז המעגל
$M(a,4)=M(-5,4)$, הרי ש- BC הוא קוטר במעגל.

$$\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-5+(-5)}{2}=-5$$
$$\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{9+(-1)}{2}=4$$

מסקנה: BC קוטר במעגל.

(3) נסמן ב- x את מספר התלמידים שיצאו לטיול.
אז: $x+6$ זה מספר התלמידים שהיו צריכים לצאת לטיול.
$\frac{1{,}800}{x+6}$ ש״ח זה התשלום שכל תלמיד היה צריך לשלם.
$\frac{1{,}800}{x}$ ש״ח זה התשלום שכל תלמיד שיצא לטיול שילם.
לפי הנתון בשאלה ניתן להרכיב את המשוואה:

$$\frac{1{,}800}{x}=\frac{1{,}800}{x+6}+10 \quad / \cdot x(x+6)$$
$$1{,}800(x+6)=1{,}800x+10x(x+6)$$
$$1{,}800x+10{,}800=1{,}800x+10x^2+60x \quad /:10$$
$$0=x^2+6x-1{,}080$$
$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36+4{,}320}}{2}=\frac{-6\pm 66}{2} \;\Rightarrow\; x_1=30 \;,\; x_2=-36$$

מספר התלמידים שיצאו לטיול הוא מספר טבעי,
לכן 30 תלמידים יצאו לטיול.

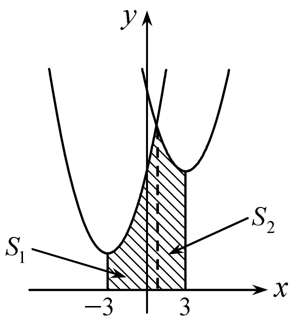
(4) (א) $f(x)=x^3+5a\,x+7 \;\Rightarrow\; f'(x)=3x^2+5a$
אם $a>0$ הרי ש- $5a>0$ ובנוסף $3x^2\ge 0$ לכל x ,
ולכן $f'(x)>0$ לכל x ואז לפונקציה אין נקודות קיצון
(הפונקציה עולה לכל x).

(ב) אם $a=0$ אז: $f(x)=x^3+7 \;\Rightarrow\; f'(x)=3x^2$
$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 3x^2=0 \;\Rightarrow\; x=0$

x	x < 0	x = 0	x > 0
f′(x)	+		+
f(x)	↗		↗

$f'(-1)=3>0$
$f'(1)=3>0$

כלומר לפונקציה אין נקודות קיצון כאשר $a=0$ (יש נקודת פיתול).



(5) (א) $f(x)=g(x)$

$x^2+6x+10=x^2-6x+22$

$12x=12 \;\Rightarrow\; x=1 \;\Rightarrow\; y=17$

כלומר נקודת החיתוך של הגרפים

של הפונקציות היא $(1,17)$.

(ב) נחלק את השטח המבוקש לשני שטחים

S_1 ו- S_2 המסומנים בסרטוט.

$$S_1=\int_{-3}^{1}(x^2+6x+10)\,dx=\frac{x^3}{3}+3x^2+10x\Big|_{-3}^{1}=$$

$$=\left(\frac{1^3}{3}+3\cdot 1^2+10\cdot 1\right)-\left[\frac{(-3)^3}{3}+3\cdot(-3)^2+10\cdot(-3)\right]=$$

$$=\frac{1}{3}+3+10-(-9+27-30)=25\frac{1}{3}$$ יחידות שטח

$$S_2=\int_{1}^{3}(x^2-6x+22)\,dx=\frac{x^3}{3}-3x^2+22x\Big|_{1}^{3}=$$

$$=\left(\frac{3^3}{3}-3\cdot 3^2+22\cdot 3\right)-\left(\frac{1^3}{3}-3\cdot 1^2+22\cdot 1\right)=$$

$$=9-27+66-\left(\frac{1}{3}-3+22\right)=28\frac{2}{3}$$ יחידות שטח

כלומר: $S_{\text{מבוקש}}=S_1+S_2=25\frac{1}{3}+28\frac{2}{3}=54$ יחידות שטח

(6) היקף כל פאה צדדית הוא $2(x+y)$ ס״מ.

לפי הנתון בשאלה נקבל:

$2(x+y)=18 \quad /:2$

$x+y=9 \;\Rightarrow\; y=9-x$

נרכיב פונקציית מטרה: פונקציית נפח התיבה.

$V=S_{\text{בסיס}}\cdot h=x^2y=x^2(9-x)$

כלומר:

$V(x)=9x^2-x^3$

$V'(x)=18x-3x^2$

$V'(x)=0 \;\Rightarrow\; 18x-3x^2=0 \;\Rightarrow\; 3x(6-x)=0$

$x_1=0\ ,\ x_2=6$

הפתרון $x_1=0$ נפסל כי $x>0$ (אורך צלע הבסיס).

$V''(x)=18-6x$

$V''(6)=18-6\cdot 6<0 \;\Rightarrow\; \max$

תשובה: כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי, אורך צלע הבסיס צריך להיות 6 ס״מ.

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות