פתרון מבחן מס' 2 (ספר לימוד – שאלון 035803)

09-05-2017

(1) (א) עבור הנקודה A מתקיים: $y_A = 0$, מכאן:

$$3x_A + 0 = 24 \;\Rightarrow\; x_A = 8 \;\Rightarrow\; A(8,0)$$

עבור הנקודה B מתקיים: $x_B = 0$, מכאן:

$$0 + 4y_B = 24 \;\Rightarrow\; y_B = 6 \;\Rightarrow\; B(0,6)$$

(ב) מרכז המעגל M הוא אמצע הקטע AB.

לפי נוסחת שיעורי אמצע קטע נקבל:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{8+0}{2} = 4$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6+0}{2} = 3$$

מכאן: $M(4,3)$.

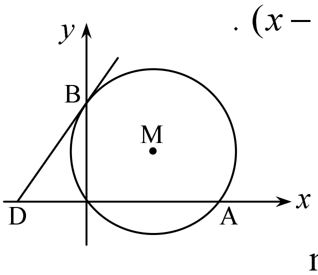
רדיוס המעגל הוא המרחק בין הנקודות $A(8,0)$, $M(4,3)$

(או בין הנקודות B ו- M).

$$R^2 = (x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2$$

$$R^2 = (8-4)^2 + (0-3)^2 = 16 + 9 = 25$$

מכאן, משוואת המעגל: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.



(ג) נוסיף סרטוט המתאר את המעגל

ואת המשיק בנקודה B:

(*i*) המשיק למעגל בנקודה B

מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה BM.

$$m_{\text{משיק}} \cdot m_{BM} = -1$$

$$m_{BM} = \frac{3-0}{4-8} = -\frac{3}{4}$$

$$m_{\text{משיק}} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \;\Rightarrow\; m_{\text{משיק}} = \frac{4}{3}$$

משוואת המשיק בנקודה B: $y - y_B = m_{\text{משיק}}(x - x_B)$

$$y - 6 = \frac{4}{3}(x-0) \;\Rightarrow\; y - 6 = \frac{4}{3}x \;\Rightarrow\; y = \frac{4}{3}x + 6$$

עבור הנקודה D מתקיים: $y_D = 0$, מכאן:

$$0 = \frac{4}{3}x + 6 \;\Rightarrow\; \frac{4}{3}x = -6 \;\Rightarrow\; x = -4.5 \;\Rightarrow\; D(-4.5,0)$$

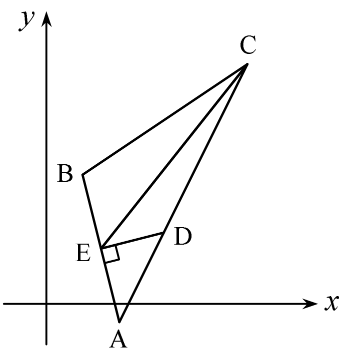
המשך בעמוד הבא ◄◄◄

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון **035803**

$$S_{\Delta ABD}=\frac{AD\cdot h}{2}=\frac{AD\cdot y_B}{2}=\frac{(x_A-x_D)\cdot y_B}{2}$$ (*ii*)

$$S_{\Delta ABD}=\frac{[8-(-4.5)]\cdot 6}{2}=\frac{12.5\cdot 6}{2}=37.5$$ יחידות שטח

(2) נתון: $ED\perp BA\ ,\ BE=EA$



(א) הנקודה E היא נקודת המפגש של הישרים DE ו- CE, לכן כדי למצוא את שיעוריה יש לפתור את מערכת המשוואות:

$$-\begin{cases}x-4y=-9\\5x-4y=3\end{cases}$$

$$-4x=-12\ \Rightarrow\ x=3$$

$$3-4y=-9\ \Rightarrow\ y=\frac{3+9}{4}=3$$

$$E(3,3)$$

(ב) לפי הנתון: $AB\perp DE$, לכן מכפלת השיפועים של שני הישרים שווה ל- (-1).

$$m_{ED}=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ m_{AB}\cdot\frac{1}{4}=-1\ \Rightarrow\ m_{AB}=-4$$

משוואת AB:

$$y-3=-4(x-3)\ \Rightarrow\ y-3=-4x+12$$

$$y=-4x+15$$

(ג) הנקודה A היא נקודת החיתוך של הישרים AB ו- AC,

לכן כדי למצוא את שיעוריה, יש לפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases}y=-4x+15\\4x-3y=19\end{cases}$$

נפתור בשיטת ההצבה:

$$4x-3(-4x+15)=19\ \Rightarrow\ 4x+12x-45=19$$

$$16x=64\ \Rightarrow\ x=4$$

$$y=-4\cdot 4+15=-1\ \Rightarrow\ A(4,-1)$$

הנקודה $E(3,3)$ היא אמצע הקטע AB,

לכן לפי נוסחת שיעורי אמצע קטע נקבל:

$$x_E=\frac{x_A+x_B}{2}\ \Rightarrow\ 3=\frac{4+x_B}{2}\ \Rightarrow\ 6=4+x_B\ \Rightarrow\ x_B=2$$

$$y_E=\frac{y_A+y_B}{2}\ \Rightarrow\ 3=\frac{-1+y_B}{2}\ \Rightarrow\ 6=-1+y_B\ \Rightarrow\ y_B=7$$

מכאן: $B(2,7)$.

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון **035803**

(3) מחיר מוצר אחרי הוזלה של $p\%$ יחושב על-ידי :

$$\frac{100\%-p\%}{100\%}\cdot\underbrace{A}_{\text{מחיר התחלתי}}=\frac{100-p}{100}\cdot A$$

לכן, אחרי ההוזלה הראשונה, המוצר עולה : $60\cdot\frac{100-x}{100}$

ואחרי ההוזלה השנייה, המוצר עולה : $60\cdot\frac{100-x}{100}\cdot\frac{100-\frac{x}{2}}{100}$.

לפי הנתון שהמחיר הסופי הוא 43.2 ש"ח, נרכיב את המשוואה :

$$\frac{100-\frac{x}{2}}{100}\cdot\frac{100-x}{100}\cdot 60=43.2 \quad /:60$$

$$\frac{200-x}{200}\cdot\frac{100-x}{100}=0.72$$

$$(200-x)(100-x)=14,400$$

$$x^2-300x+20,000=14,400$$

$$x^2-300x+5,600=0$$

$$x_{1,2}=\frac{300\pm\sqrt{90,000-22,400}}{2}=\frac{300\pm 260}{2}$$

$$x_1=280 \ , \ x_2=20$$

הפתרון $x=280$ נפסל כי לא תתכן הוזלה של מעל 100% .

תשובה : $x=20$.

(4) **(א)**

$$f(x)=3x(x+2)^2$$
$$f(x)=3x(x^2+4x+4)$$
$$f(x)=3x^3+12x^2+12x$$

למציאת נקודות הקיצון, נגזור את הפונקציה :

$$f'(x)=(3x^3+12x^2+12x)'=9x^2+24x+12$$

נשווה את הנגזרת לאפס ונקבל :

$$9x^2+24x+12=0 \quad /:3$$

$$3x^2+8x+4=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64-48}}{6}=\frac{-8\pm 4}{6} \quad\Rightarrow\quad x_1=-\frac{2}{3} \ , \ x_2=-2$$

המשך בעמוד הבא >>>

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון **035803**

$$x_1=-\tfrac{2}{3} \;\Rightarrow\; y_1=3\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right)\left(-\tfrac{2}{3}+2\right)^2=-3\tfrac{5}{9} \;\Rightarrow\; \left(-\tfrac{2}{3},-3\tfrac{5}{9}\right)$$

$$x_2=-2 \;\Rightarrow\; y_2=3\cdot(-2)(-2+2)^2=0 \;\Rightarrow\; (-2,0)$$

קיבלנו שתי נקודות חשודות לקיצון: $\left(-\tfrac{2}{3},-3\tfrac{5}{9}\right)$ ו- $(-2,0)$.

נבדוק האם באמת נקודות אלו הן נקודות קיצון:

$$f''(x)=(9x^2+24x+12)'=18x+24$$

$$f''(-2)=18\cdot(-2)+24<0 \;\Rightarrow\; \max$$

$$f''\left(-\tfrac{2}{3}\right)=18\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right)+24>0 \;\Rightarrow\; \min$$

קיבלנו שתי נקודות קיצון: $\min\left(-\tfrac{2}{3},-3\tfrac{5}{9}\right)$, $\max(-2,0)$.

(ב) נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$$x=0 \;\Rightarrow\; y=0 \;\Rightarrow\; (0,0)$$

נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$y=0 \;\Rightarrow\; 3x(x+2)^2=0$$

$$x=0 \;\Rightarrow\; y=0$$

$$x+2=0 \;\Rightarrow\; x=-2$$

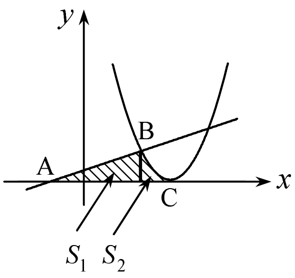
הגרף חותך את הצירים בשתי נקודות: $(0,0)$, $(-2,0)$.

(ג) בנקודת הקיצון, המשיק מקביל לציר ה- x ומשוואתו: $y=y_{\text{קיצון}}$.

לכן, משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות הקיצון שלה:

$$y=0\ ,\ y=-3\tfrac{5}{9}$$

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון **035803**



(5) כדי להגדיר את גבולות האינטגרציה,
נמצא את שיעורי ה- x של הנקודות
A , B ו- C.

שיעור ה- x של הנקודה A :

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow x_A=-1$$

שיעור ה- x של הנקודה B :

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \\ y=(x-3)^2 \end{cases}$$

$$(x-3)^2=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \Rightarrow x^2-6x+9=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \quad / \cdot 3$$

$$3x^2-18x+27=x+1$$
$$3x^2-19x+26=0$$

$$x_{1,2}=\frac{19\pm\sqrt{361-312}}{6}=\frac{19\pm7}{6} \Rightarrow x_1=2 \ , \ x_2=4\frac{1}{3}$$

לנקודה B מתאים ערך ה- x הקטן מבין שני הפתרונות, לכן $x_B=2$.

שיעור ה- x של הנקודה C :

$$\begin{cases} y=(x-3)^2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow (x-3)^2=0 \Rightarrow x_C=3$$

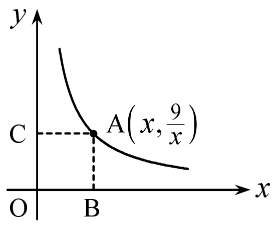
נחלק את השטח המבוקש לשני חלקים : $S=S_1+S_2$.

$$S_1=\int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)dx=\int_{-1}^{2}\frac{x+1}{3}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{(x+1)^2}{2}\Big|_{-1}^{2}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left[(2+1)^2-(-1+1)^2\right]=\frac{3}{2}$$ יחידות שטח

$$S_2=\int_{2}^{3}(x-3)^2\,dx=\frac{(x-3)^3}{3}\Big|_{2}^{3}=\frac{(3-3)^3-(2-3)^3}{3}=\frac{1}{3}$$ יחידת שטח

השטח המבוקש : $S=S_1+S_2=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}=1\frac{5}{6}$ יחידות שטח



(6) $y = \frac{9}{x}$

(א) $BO = AC = x_A = x \ , \ CO = AB = y_A = \frac{9}{x}$

(ב) נרכיב את פונקציית המטרה

(היקף המלבן ABOC):

$$P(x) = 2 \cdot \left(BO + CO \right) = 2 \cdot \left(x + \frac{9}{x} \right)$$

נמצא מתי הפונקציה מקבלת ערך מינימלי:

$$P'(x) = 2 \cdot \left(1 - \frac{9}{x^2} \right)$$

$$P'(x) = 0 \ \Rightarrow \ 2 \cdot \left(1 - \frac{9}{x^2} \right) = 0 \ \Rightarrow \ \frac{9}{x^2} = 1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ x^2 = 9 \ \Rightarrow \ x = \pm 3$$

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון, כלומר $x > 0$,

ולכן הפתרון המתקבל הוא $x = 3$.

נבדוק האם ההיקף עבור $x = 3$ הוא אכן מינימלי:

$$P''(x) = \left[2 \cdot \left(1 - \frac{9}{x^2} \right) \right]' = 2 \cdot \left(0 + \frac{9 \cdot 2}{x^3} \right) = \frac{36}{x^3}$$

$$P''(3) = \frac{36}{3^3} > 0 \ \Rightarrow \ \min$$

תשובה: עבור שיעור ה- x של הנקודה A השווה ל- 3 ,

היקף המלבן יהיה מינימלי.

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – לספר לימוד לשאלון **035803**

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות