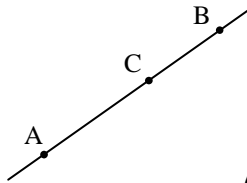


שאלון 035007 - חלוקת קטע ביחס נתון

הנושא "חלוקת קטע ביחס נתון" (בוקטורים) התווסף לתוכנית הלימודים של שאלון 035007 בחוזר מפמ"ר המתמטיקה תשס"ה / 1. הנושא לא הופיע בחוזרי מפמ"רי המתמטיקה תשס"ג / 2 ותשס"ג / 4.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

א. חלוקה פנימית



נפתח בדוגמא מספרית, ואחריה נפתור באופן כללי.

נתונות שתי נקודות A ו-B במרחב (המרחב יכול להיות חד-מימדי, דו-מימדי או תלת-מימדי). יש למצוא את שיעורי הנקודה C, המחלקת מבפנים את הקטע AB ביחס של 3:2 (כלומר: AC:BC = 3:2).

פתרון:

נתבונן בוקטורים \vec{AC} ו- \vec{CB} . אורכי הוקטורים מקיימים: $\frac{|\vec{AC}|}{|\vec{CB}|} = \frac{3}{2}$.
אם נכפול בהצלבה נקבל: $2 \cdot |\vec{AC}| = 3 \cdot |\vec{CB}|$.
הוקטורים \vec{AC} ו- \vec{CB} הם באותו כיוון, ולכן מתקיים: $2 \cdot \vec{AC} = 3 \cdot \vec{CB}$.
נסמן על-ידי \underline{a} , \underline{b} ו- \underline{c} את שיעורי הנקודות A, B ו-C בהתאמה.
לפיכך מתקיים: $2 \cdot (\underline{c} - \underline{a}) = 3 \cdot (\underline{b} - \underline{c})$

נפתח סוגריים, נבודד את \underline{c} ונקבל:
 $5 \cdot \underline{c} = 2 \cdot \underline{a} + 3 \cdot \underline{b}$
נחלק ב-5 ונקבל:

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

$$\underline{c} = \frac{2}{5} \cdot \underline{a} + \frac{3}{5} \cdot \underline{b}$$

נפתור כעת את אותה הבעיה, אך באופן כללי:

יש למצוא נקודה C המחלקת מבפנים את הקטע AB ביחס של $m:n$.

פתרון:

יחס החלוקה $m:n$ ניתן לרישום גם כיחס: $p:(1-p)$,

כאשר: $p = \frac{m}{m+n}$ ו- $1-p = \frac{n}{m+n}$.

ניתן לראות כי: $\frac{p}{1-p} = \frac{m}{n}$ וגם כי: $\frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = 1$.

מכאן גם מקבלים כי: $0 < p < 1$ (היות והמכנה בביטוי $\frac{m}{m+n}$ גדול מהמונה).

המשך בעמוד הבא...

אם הנקודה C מחלקת את הקטע AB ביחס של $p : (1-p)$ אזי:
 תחת הסימונים שפורטו לעיל, ולאחר שנכפול בהצלבה נקבל את המשוואה:
 ומכאן נקבל:

$$\frac{|\vec{AC}|}{|\vec{CB}|} = \frac{p}{1-p}$$

$$(1-p) \cdot (\underline{c} - \underline{a}) = p \cdot (\underline{b} - \underline{c})$$

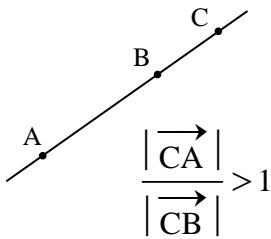
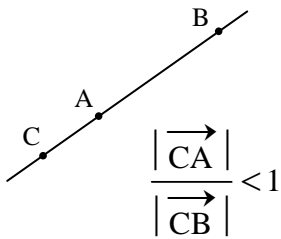
$$\underline{c} = (1-p) \cdot \underline{a} + p \cdot \underline{b}$$

© גבי יקואל
 הוצאת משבצת

* * * * *

ב. חלוקה חיצונית

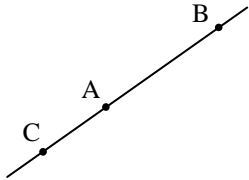
אם הנקודה C נמצאת על הישר המחבר את הנקודות A ו-B, אך מחוץ לקטע AB אז אומרים שהנקודה C מחלקת את הקטע AB **מבחוץ** ביחס של $|\vec{CA}| : |\vec{CB}|$.
 • אם היחס **גדול מ-1**, אז הנקודה C קרובה יותר לנקודה B מאשר לנקודה A.
 • אם היחס **קטן מ-1**, אז הנקודה C קרובה יותר לנקודה A מאשר לנקודה B.



דוגמא מס' 1

נתונות שתי הנקודות במרחב: A(1,2,3) ו-B(4,6,2). מצא את שיעורי הנקודה C, המחלקת את הקטע AB ביחס 1:3, מבחוץ.

פתרון:



היחס מקיים: $|\vec{CA}| : |\vec{CB}| = \frac{1}{3} < 1$
 כלומר: $3 \cdot (\underline{a} - \underline{c}) = 1 \cdot (\underline{b} - \underline{c})$
 $3 \cdot \underline{a} - 3 \cdot \underline{c} = \underline{b} - \underline{c}$
 ומכאן: $\underline{c} = 1\frac{1}{2} \cdot \underline{a} - \frac{1}{2} \cdot \underline{b}$

© גבי יקואל
 הוצאת משבצת

נציב את שיעורי הנקודות הנתונות ונקבל:
 $\underline{c} = 1\frac{1}{2} \cdot (1, 2, 3) - \frac{1}{2} \cdot (4, 6, 2)$
 כלומר: $\underline{c} = (-\frac{1}{2}, 0, 3\frac{1}{2})$

דוגמא מס' 2

בדוגמא הקודמת, מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה A את הקטע CB.

פתרון: דרך מס' (1)

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

ידוע לנו שהקטע CB ארוך פי 3 מהקטע CA.

לכן, הקטע AB ארוך פי 2 מהקטע CA.

מסקנה: הנקודה A מחלקת את הקטע CB ביחס של 1:2.

פתרון: דרך מס' (2)

נתונות הנקודות: $A(1, 2, 3)$, $B(4, 6, 2)$ ו- $C(-\frac{1}{2}, 0, 3\frac{1}{2})$.

נשתמש בנוסחה לחישוב מרחק בין שתי נקודות ונקבל:

$$|\vec{CA}| = \sqrt{[1 - (-\frac{1}{2})]^2 + (2 - 0)^2 + (3 - 3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{2\frac{1}{4} + 4 + \frac{1}{4}} = \sqrt{6\frac{1}{2}}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$$

$$|\vec{CA}| : |\vec{AB}| = \frac{\sqrt{6.5}}{\sqrt{26}} = \frac{1}{2} \quad \text{מכאן נקבל:}$$

מסקנה: הנקודה A מחלקת את הקטע CB ביחס של 1:2.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

פתרון: דרך מס' (3)

נראה להלן **דרך כללית** לפתרון בעיה מסוג זה, עבור המקרים בהם הנקודה C קרובה יותר לנקודה A מאשר לנקודה B. באופן דומה ניתן לפתור גם למקרה שבו הנקודה C קרובה יותר לנקודה B מאשר לנקודה A.

מבלי לפגוע בכלליות הבעיה,

$$|\vec{CA}| : |\vec{CB}| = p, \quad |\vec{AB}| : |\vec{CB}| = 1 - p \quad \text{נוכל לסמן:}$$

$$0 < p < 1 \quad \text{ו-} \quad 0 < 1 - p < 1$$

$$\frac{|\vec{CA}|}{|\vec{AB}|} = \frac{p}{1 - p} \quad \text{מתקיים היחס:}$$

נכפול באלכסון את השוויון

$$\vec{AB} \quad \text{ו-} \quad \vec{CA}$$

$$(1 - p) \cdot \vec{CA} = p \cdot \vec{AB} \quad \text{האחרון וניעזר בכך שהוקטורים הם בעלי אותו הכיוון ונקבל:}$$

$$(1 - p) \cdot (\underline{a} - \underline{c}) = p \cdot (\underline{b} - \underline{a}) \quad \text{כלומר:}$$

המשך בעמוד הבא...

$$\underline{a} - \underline{c} - p \cdot (\underline{a} - \underline{c}) = p \cdot (\underline{b} - \underline{a})$$

$$\underline{a} - \underline{c} = p \cdot (\underline{b} - \underline{a})$$


$$(1\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}) = p \cdot (4\frac{1}{2}, 6, -1\frac{1}{2})$$

בבעיה שלפנינו:

$$\text{כלומר: } p = \frac{1}{3} \text{ ולכן: } 1 - p = \frac{2}{3}$$

היחס המבוקש הוא: $p : (1 - p)$, כלומר: 1:2.

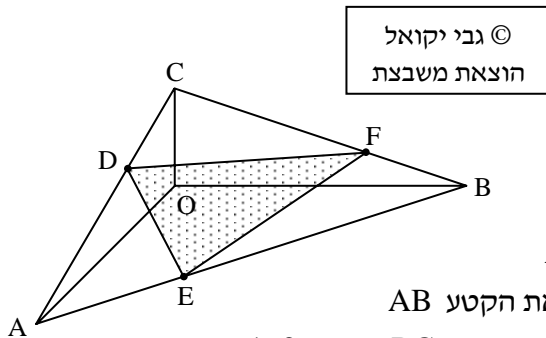
© גבי יקואל
הוצאת משבצת

הערה: שים לב, כי הנקודה A מחלקת את הוקטור \overrightarrow{CB} ביחס של 1:2, ואילו את הקטע \overrightarrow{BC} ביחס של 2:1. 

תרגילים לעבודה עצמית

(1) הוכח כי אם הנקודה C נמצאת באמצע הקטע AB, אזי: $\underline{c} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{a} + \underline{b})$, כאשר \underline{a} , \underline{b} ו- \underline{c} מסמנים את שיעורי הנקודות A, B ו-C בהתאמה.

(2) נתון משולש ΔABC ששיעורי קדקודיו: $A(1, 2, 0)$, $B(3, 4, 6)$, $C(6, 5, 9)$.
CD הוא התיכון לצלע AC במשולש ΔABC . AE הוא התיכון לצלע CD במשולש ΔACD . F היא נקודת המפגש של הישרים AC ו-BE.
מצא את שיעורי הנקודה F.



(3) במרחב נתונות ארבע הנקודות:

$$A(6, 0, 0), B(0, 9, 0)$$

$$C(0, 0, 3), O(0, 0, 0)$$

הנקודה D מחלקת את הקטע AC

ביחס 2:1. הנקודה E מחלקת את הקטע AB

ביחס 1:2. הנקודה F מחלקת את הקטע BC ביחס 1:2.

(א) מצא את שיעורי הנקודות D, E ו-F.

(ב) התיכונים לצלעות במשולש ΔDEF נפגשים בנקודה M.

מצא את אורך הקטע OM.

(4) נתונים שיעורים של שלוש נקודות: $A(3,1,-3)$, $B(1,4,-7)$, $C(5,-2,1)$.

(א) הראה ששלוש הנקודות נמצאות על קו ישר אחת, כאשר הנקודה C

נמצאת מחוץ לקטע AB.

(ב) באיזה יחס מחלקת הנקודה C את הקטע AB?

(ג) באיזה יחס מחלקת הנקודה C את הקטע BA? נמק!

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(5) נתונים שיעורים של שתי נקודות: $A(4,1)$ ו- $B(29,51)$. הנקודה C מחלקת

את הקטע AB מבפנים ביחס $AC:CB = 2:3$. הנקודה D מחלקת את

הקטע CB מבפנים ביחס $CD:DB = 2:3$. מצא את הוקטור \vec{CD} .

(6) במשולש ΔABC נתון כי: $\vec{AB} = (6,4)$ ו- $\vec{AC} = (-4,6)$.

(א) הוכח כי המשולש ΔABC הוא משולש ישר-זווית.

(ב) נקודה D נמצאת באמצע היתר BC. מצא את הוקטור \vec{AD} .

(ג) נקודה E מחלקת את היתר ביחס $CE:EB = 2:3$.

מצא את הוקטור \vec{AE} .

(ד) מצא את הוקטור \vec{ED} .

(ה) נקודה F נמצאת באמצע הצלע AB. מצא את הוקטור \vec{CF} .

(ו) נקודה M היא נקודת המפגש של התיכון AD עם התיכון CF.

הוכח כי: $\vec{MB} = (\frac{16}{3}, \frac{2}{3})$.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

תשובות

(2) $(\frac{13}{3}, 4, 6)$

(3) (א) $D(2,0,2)$, $E(4,3,0)$, $F(0,6,1)$ (ב) $\sqrt{14}$

(4) (א) 1:2 (ב) 2:1

(5) $\vec{CD} = (6,12)$

(6) (א) $\vec{AE} = (0,5.2)$ (ב) $\vec{AD} = (1,5)$ (ג)

(ד) $\vec{ED} = (1,-0.2)$ (ה) $\vec{CF} = (7,-4)$

© גבי יקואל
הוצאת משבצת