

גבי יקואל

שאלות חזרה לתלמידי שאלון ז' 035007 בנושאים:

וקטורים, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

קובץ בעיות בוקטורים..... 2 - 6

תשובות לבעיות בוקטורים..... 7

קובץ בעיות בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי..... 8 - 15

8..... כעיות עם פונקציות חלקה עם מעריך רציונלי

9..... כעיות עם פונקציות מעריכיות

12..... כעיות עם פונקציות לוגריתמיות

15 - 20..... תשובות לבעיות בחדו"א

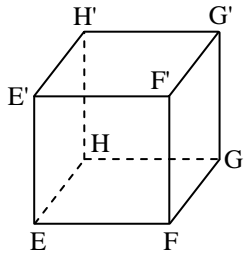
לחלק מהכעיות מצורפים פתרונות מלאים

כל הבעיות שמופיעות בקובץ זה לקוחות מתוך הספר: מבחני מתכונת במתמטיקה – שאלון ז' 035007 (מאת גבי יקואל).

בספר עצמו מופיעות עוד עשרות בעיות חזרה
חדשות בנושאים השונים של שאלון ז' 035007
בתוספת 48 מבחני מתכונת של השאלון.

קובץ בעיות בוקטורים

מתוך הספר: מבחני מתכונת כמתטיקה - אלאון ז' 035007 גבי יקואל



© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(1) בקוביה EFGHE'F'G'H' הפאה FGG'F'

נמצאת על המישור: $2x - y + 2z = 0$

והפאה EHH'E' נמצאת על המישור:

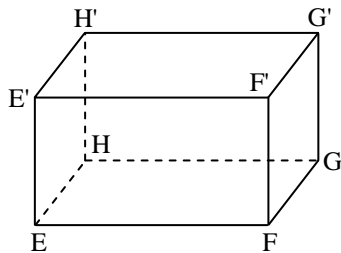
$$2x - y + 2z = 4$$

(א) חשב את נפח הקוביה.

(ב) נתון כי הפאה EFGH נמצאת על המישור:

$$2y + z = 0$$

המקצוע E'H' (מצא את שתי האפשרויות הקיימות עבור הישר E'H').



(2) נתונה תיבה EFGHE'F'G'H'.

משוואת המישור EFGH, שיכונה

$$x + y - z = 4$$

ומשוואת המישור E'F'G'H', שיכונה

$$x + y - z = 0$$

מישור ב', היא: אורך הצלע EF גדול פי $\sqrt{3}$ מאורך הצלע EE'. הפאה EHH'E' היא ריבוע.

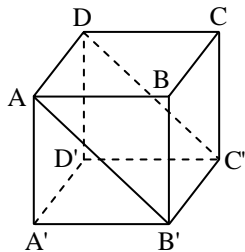
(א) חשב את נפח התיבה.

(ב) משוואת המישור FGG'F', שיכונה מישור ג', היא: $x + y + 2z = 0$.

מצא את ההצגה הפרמטרית של הישר EH (מצא את שתי האפשרויות

הקיימות עבור הישר EH).

© גבי יקואל
הוצאת משבצת



(3) נתונה קוביה ABCDA'B'C'D' (ראה ציור).

(א) מישור א' הוא מישור הפאה ABCD

$$y + z = 3$$

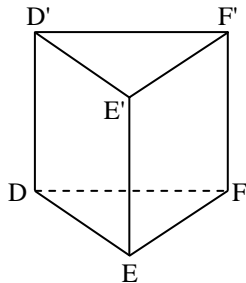
ומישור ב' הוא מישור הפאה A'B'C'D'

$$y + z = 1$$

חשב את נפח הקוביה.

(ב) מישור ג' הוא המישור AB'C'D' ומשוואתו: $y = 1$.

מצא הצגה פרמטרית של הישר BC.



(4) נתונה מנסרה ישרה ומשולשת DEF D'E'F'.

בסיס המנסרה הוא המשולש $\triangle DEF$

ובו מתקיים: $|DE| = |EF|$ וכן: $\sphericalangle DEF = 90^\circ$.

משוואת המישור DEF: $5x - y + z = 0$

(מישור א'): משוואת המישור D'E'F':

$5x - y + z = 3$ (מישור ב').

שיעורי הנקודה E הם: $(0,0,0)$.

נתון שגובה המנסרה הוא h והוא שווה לצלע DF: $h = |DD'| = |DF|$.

(א) חשב את נפח המנסרה.

(ב) נתון, שמשוואת המישור EFF'E' שסומן מישור ג', היא: $y + z = 0$.

מצא את משוואת המישור DEE'D' שסומן מישור ד'.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(5) נתונה מנסרה ישרה ABCA'B'C' שבסיסה הוא משולש ישר זווית ושווה

שוקיים $\triangle ABC$, ובו: $\sphericalangle B = 90^\circ$. כמו כן, נתון שהנקודה B

היא: $(0,0,0)$. ידוע שהפאה ACC'A' היא ריבוע.

משוואת המישור ABC: $2x + 2y - z = 0$ (מישור א').

משוואת המישור A'B'C': $2x + 2y - z = 8$ (מישור ב').

(א) חשב את נפח המנסרה.

(ב) מצא הצגה פרמטרית של הצלע BB' ומצא את שיעורי הנקודה B'.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(6) בטראדר SABC נתונים שיעורי הקדקודים הבאים:

$S(3,1,3)$, $A(1,2,4)$, $B(1,2,1)$.

הנקודה D מחלקת את הצלע AB ביחס 1:2,

כלומר: $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{1}{2}$.

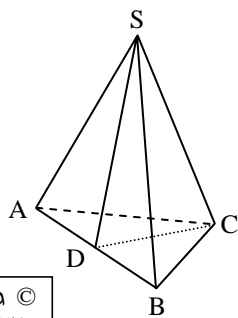
(א) מצא את שיעורי הנקודה D.

(ב) שיעורי הנקודה C הם: $(k, 2k, 3)$.

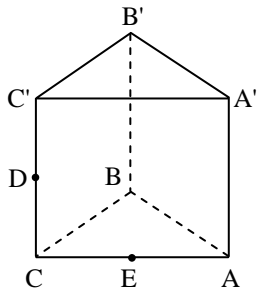
(i) הוכח ש: $k \neq 1$.

(ii) הוכח שהזווית $\sphericalangle SDC$ היא בת 90° .

(iii) מצא את k אם נתון ששטח המשולש $\triangle SDC$ הוא 4.



© גבי יקואל
הוצאת משבצת



(7) נתונה מנסרה משולשת: $ABCA'B'C'$ ובה:

$AA' \parallel BB' \parallel CC'$ (הקטעים מקבילים),

וכן: $|AA'| = |BB'| = |CC'|$ (הקטעים

שווי אורך). נתון כי: $A(1,0,0)$, $A'(3,2,0)$,

$B'(2,4,0)$, $C(3,2,2)$.

(א) מצא את שיעורי הקדקודים B ו- C' .

(ב) הנקודות D ו-E נמצאות באמצעי הקטעים

CC' ו-AC בהתאמה. מצא את שיעורי הנקודות D ו-E.

(ג) האם ניתן למצוא נקודה P בתוך הקטע $A'B'$ כך שהזווית $\sphericalangle PED$

תהיה בת 90° ?

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(8) נתונה פירמידה מרובעת ABCDS שבסיסה הוא המקבילית ABCD

ונתון: $A(2,0,6)$, $B(0,6,2)$, $C(-2,6,4)$, $S(4,4,4)$.

הנקודות M ו-N נמצאות על הצלעות

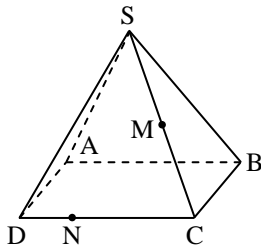
CS ו-DC בהתאמה, כך ש-M נמצאת

באמצע הצלע CS ו-N מחלקת את הצלע DC

ביחס של 1:3, כלומר: $\frac{|DN|}{|NC|} = \frac{1}{3}$.

(א) מצא הצגה פרמטרית לישירים AM ו-AN.

(ב) חשב את הזווית $\sphericalangle MAN$.



© גבי יקואל
הוצאת משבצת

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(9) נתון מקבילון: $ABCD A'B'C'D'$. נתונות

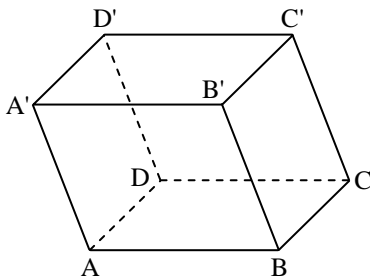
הנקודות: $B(1,0,1)$, $C(2,2,3)$,

$D(k, k+1, k)$, $D'(-2,4,3)$

ונתון כי ABCD הוא מלבן.

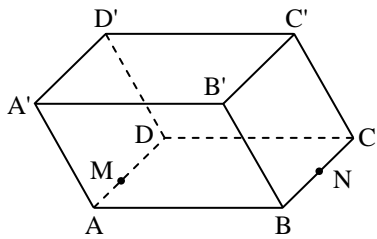
(א) מצא את k.

(ב) הוכח שהמקבילון הוא תיבה.



© גבי יקואל
הוצאת משבצת

© גבי יקואל
הוצאת משבצת



© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(10) נתון מקבילון $ABCD A'B'C'D'$.

נתונות הנקודות: $A(1,1,0)$, $B(0,1,2)$, $C(0,0,1)$, $A'(1,1,1)$.

הנקודה N נמצאת באמצע הצלע BC .

הנקודה M מחלקת את הצלע AD

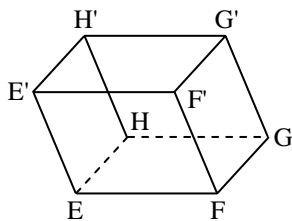
ביחס $AM : MD = 2 : 3$.

(א) מצא את שיעורי הנקודות M ו- N .

(ב) מה המצב ההדדי של הישרים MC' ו- NA' .

(ג) מה הזווית בין הישרים MC' ו- NA' ?

© גבי יקואל
הוצאת משבצת



© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(11) נתון מקבילון $EFGHE'F'G'H'$ ונתונות הנקודות:

$E(1,1,4)$, $G(2,0,4)$, $H(3,1,8)$, $H'(5,3,8)$.

(א) מצא את שיעורי ארבעת הקדקודים

שאינם נתונים.

(ב) מצא את משוואת המישור $E'F'G'H'$.

(ג) מצא את משוואת המישור $FGG'F'$.

(ד) בדוק האם שני המישורים המוזכרים בסעיפים (ב) ו- (ג) מאונכים

זה לזה. נמק ! אם אינם מאונכים חשב את הזווית ביניהם.

(12) נתון מקבילון $EFGHE'F'G'H'$ ונתונים ארבעת מקדקודיו:

$E(2,9,2)$, $F(2,7,2)$, $G(0,-2,0)$, $H'(6,1,1)$.

(א) מצא את שיעורי ארבעת הקדקודים

שאינם נתונים.

(ב) מצא את משוואת המישור $E'F'G'H'$.

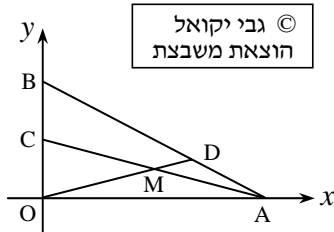
(ג) מצא הצגה פרמטרית של הישר $E'G$.

(ד) חשב את הזווית בין המישור הנדון

בסעיף (ב) והישר הנדון בסעיף (ג).

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

© גבי יקואל
הוצאת משבצת



(13) נתון משולש ΔOAB . הנקודה C נמצאת על

הצלע OB והנקודה D נמצאת על הצלע AB באופן ש: $\vec{OC} = \vec{CB}$ וכן $\vec{BD} = 2 \cdot \vec{DA}$.

הנקודה M היא נקודת מפגש הקטעים

AC ו-OD. בסעיפים (א) ו-(ב) עליך לחשב באיזה

יחס מחלקת הנקודה M את הקטע AC.

(א) סמן: $\vec{OA} = \underline{u}$, $\vec{OC} = \underline{v}$, $\vec{OM} = t \cdot \vec{OD}$, $\vec{AM} = s \cdot \vec{AC}$.

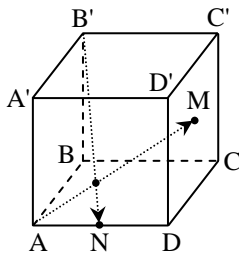
מצא את t ואת s וחשב את היחס המבוקש.

(ב) מציאת היחס בעזרת מערכת צירים, וקביעת שיעורי נקודות כלהלן:

$O(0,0)$, $A(9,0)$, $B(0,6)$, מצא את שיעורי הנקודות

C, D ו-M, וחשב את היחס המבוקש.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת



(14) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ (ראה ציור).

הנקודה M היא מפגש האלכסונים בפאה $CDD'C'$.

הנקודה N היא אמצע המקצוע AD.

(א) נתון כי: $A(1,2,-7)$, $B(2,3,1)$,

$D(-5,0,-6)$, $D'(12,-49,-2)$.

(i) מצא את שיעורי הנקודה B' , והנקודה N.

(ii) מצא הצגה פרמטרית של הישר $B'N$.

(iii) מצא הצגה פרמטרית של הישר AM.

(iv) קבע מהו מצבם ההדדי של הישרים $B'N$ ו-AM.

(ב) נתון כי: $\vec{AD} = \underline{u}$, $\vec{AB} = \underline{v}$, $\vec{AA'} = \underline{w}$.

קבע מהו מצבם ההדדי של הישרים $B'N$ ו-AM.

שים לב: יש לפתור את כל אחד מהסעיפים מבלי להשתמש בנתוני הסעיף השני.

תשובות

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(1) (א) $V = \frac{64}{27}$

(ב) אפשרות א': $\underline{x} = \left(0, \frac{8\sqrt{5}-12}{15}, \frac{4\sqrt{5}+24}{15}\right) + t \cdot (5, 2, -4)$

אפשרות ב': $\underline{x} = \left(0, \frac{-8\sqrt{5}-12}{15}, \frac{24-4\sqrt{5}}{15}\right) + t \cdot (5, 2, -4)$

(2) (א) $V = \frac{64}{3}$

(ב) אפשרות א': $(x, y, z) = \left(0, \frac{8+4\sqrt{6}}{3}, \frac{-4+4\sqrt{6}}{3}\right) + t \cdot (1, -1, 0)$

אפשרות ב': $(x, y, z) = \left(0, \frac{8-4\sqrt{6}}{3}, \frac{-4-4\sqrt{6}}{3}\right) + t \cdot (1, -1, 0)$

(3) (א) $V = 2\sqrt{2}$

(ב) אפשרות א': $(x, y, z) = (0, 2, 1) + t \cdot (1, 0, 0)$

אפשרות ב': $(x, y, z) = (0, 0, 3) + t \cdot (1, 0, 0)$

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(4) (א) $V = \frac{1}{12\sqrt{3}}$ (ב) $2x + 5y - 5z = 0$ (א) $V = \frac{128}{27}$ (5)

(5) (ב) $B\left(\frac{16}{9}, \frac{16}{9}, -\frac{8}{9}\right)$, $\underline{x} = (0, 0, 0) + t \cdot (2, 2, -1)$

(6) (א) $D(1, 2, 3)$ (ב) $k = -0.6$ או $k = 2.6$ (iii)

(7) (א) $B(0, 2, 0)$, $C(5, 4, 2)$ (ב) $D(4, 3, 2)$, $E(2, 1, 1)$ (א) לא

(8) (א) הצגה פרמטרית של הישר AM: $\underline{x} = (2, 0, 6) + t \cdot (-1, 5, -2)$

הצגה פרמטרית של הישר AN: $\underline{x} = (2, 0, 6) + s \cdot (-5, 3, 2)$

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(9) (א) $k = 2$ (ב) $\sphericalangle MAN = 61.71^\circ$

(10) (א) $M(1, 0.6, -0.4)$, $N(0, 0.5, 1.5)$ (ב) הישרים מצטלבים. (ג) 40.09°

(11) (א) $F(0, 0, 0)$, $G(4, 2, 4)$, $F'(2, 2, 0)$, $E'(3, 3, 4)$

(12) (א) $H(0, 0, 0)$, $E(8, 10, 3)$, $F'(8, 8, 3)$, $G'(6, -1, 1)$ (ב) $2x + 2y - z = 8$ (ג) $2x - 2y - z = 0$ (ד) 83.62°

(13) (א) $s = \frac{1}{2}$, $t = \frac{3}{4}$, היחס המבוקש הוא 1:1. (ב) $C(0, 3)$, $D(6, 2)$, $M(4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$. היחס המבוקש הוא 1:1.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(14) (א) (i) $B(19, -46, 5)$, $N(-2, 1, -6.5)$

(ii) $\underline{x} = (19, -46, 5) + t \cdot (-21, 47, -11.5)$

(iii) $\underline{x} = (1, 2, -7) + s \cdot (3, -26, 7)$

(iv) הישרים נחתכים. (ב) הישרים נחתכים.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

קובץ בעיות בחדו"א

מתוך הספר: מבחני מתכונת כמתמטיקה - אלאון ז' 035007 גבי יקואל

פונקציות חזקה עם מעריך רציונלי

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(1) נתונה הפונקציה: $y = \frac{x}{1 - 2\sqrt[4]{x}}$

- (א) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (ב) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- (ג) מצא את תחומי העלייה ותחומי הירידה של הפונקציה.
- (ד) מצא את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים.
- (ה) תאר סקיצה של גרף הפונקציה.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(2) נתונה הפונקציה: $y = \sqrt[3]{x^2 + 48}$. מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות כלפי מטה והקעירות כלפי מעלה של הפונקציה הנתונה.

(3) לפונקציה: $y = 5\sqrt{x^3} - a \cdot \sqrt[4]{x^5} + b \cdot x$ יש נקודת קיצון פנימית (1, 2).
(א) מצא את a ו- b .

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

- (ב) מצא את נקודת הקיצון הפנימית השנייה.
- (ג) רשום את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(4) בין הגרפים של הפונקציות: $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2}$

ו- $g(x) = \sqrt[3]{52 - 8x}$ וציר ה- x

חסום מלבן ABCD (ראה ציור).

(א) סמן את שיעור ה- x של נקודה A ב- t

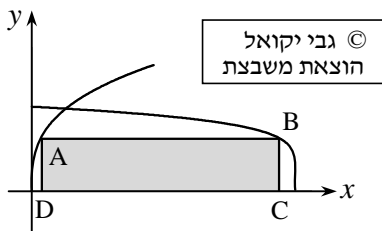
והראה כי ניתן להביע את שטח המלבן S

על-ידי: $S(t) = 2\sqrt[3]{t^2} \cdot (6.5 - t^2 - t)$.

(ב) מצא את ערכו של t שעבורו למלבן יש שטח מקסימלי.

(ג) מהו השטח המקסימלי של המלבן?

© גבי יקואל
הוצאת משבצת



© גבי יקואל
הוצאת משבצת

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(5) נתונות הפונקציות: $y = x^6$ ו- $f(x) = \sqrt[6]{x}$.

(א) הראה כי הישר: $y = x$ מחלק את השטח

שבין הגרפים של שתי הפונקציות לשני שטחים שווים.

(ב) דרך הנקודה $(-5, 0)$ מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y .

פונקציות מעריכיות

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(6) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x} - 2e^x$.

(א) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

(ב) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(ג) הוסף לסקיצה ששרטטת בסעיף (ב) סקיצה של

גרף הפונקציה: $g(x) = e^{2x} - 1$ ומצא את:

(i) נקודות החיתוך של שני הגרפים.

(ii) השטח המוגבל על-ידי הגרפים של שתי הפונקציות ועל-ידי ציר ה- y .

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(7) נתונה הפונקציה: $y = \frac{e^{a \cdot x}}{x-1}$ ($a > 0$).

(א) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(ב) הבע באמצעות a את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה

וקבע את סוגה.

(ג) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

(ד) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(ה) נתון הישר: $y = k$. הבע באמצעות a את הערכים של k עבורם

יש נקודת חיתוך אחת בין הישר הנתון לגרף פונקציה הנתונה.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(8) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^x \cdot (x^2 - (k-1) \cdot x + 1)$ ($1 < k < 2$).

(א) מצא את שיעורי ה- x של נקודות המינימום והמקסימום

של הפונקציה (הבע באמצעות k במידת הצורך).

(ב) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.

(ג) * מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(ד) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(9) נתונה הפונקציה: $f(x) = -2x \cdot e^{2x}$.

(א) מצא באיזו נקודה על גרף הפונקציה

יש להעביר משיק כדי ששיפוע המשיק יהיה מקסימלי.

(ב) מצא גם את משוואת המשיק בעל השיפוע המקסימלי.

(10) נתונה הפונקציה: $y = \frac{e^x}{(e^x + e)^2}$.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(א) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה,

והסבר מדוע ערך הפונקציה הוא חיובי לכל x .

(ב) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(ג) השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה,

הישרים: $x = 1$, $x = a$ ($a > 1$) וציר ה- x הוא: $S = \frac{e-1}{2e \cdot (e+1)}$.

מצא את ערכו של הפרמטר a .

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(11) נתונה הפונקציה: $y = e^{\sin x}$ (בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$).

(א) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(ב) מצא את נקודות הקיצון של ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(ג) מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

ורשום תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה.

(ד) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

אלף וז מלך פתרון מלא.

(12) נתונה הפונקציה: $y = e^{\operatorname{tg} x}$ (בתחום: $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$).

הוכח כי הפונקציה קעורה כלפי מעלה \cup בכל התחום הנתון.

(13) נתונה הפונקציה: $y = e^{-\cos x}$ (בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$).

(א) מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה בתחום הנתון.

(ב) רשום את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה

של הפונקציה בתחום הנתון.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(14) נתונה הפונקציה: $y = 2^{1-x^2}$.

- (א) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוג הקיצון.
 (ב) רשום את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 (ג) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.

אלף אלף פתרון אלף

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(15) נתונה הפונקציה: $y = 2 - 10^{x-x^2}$.

- (א) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוג הקיצון.
 (ב) רשום את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(16) נתונה הפונקציה: $y = x \cdot 2^{-m \cdot x}$.

- שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא: $2 \cdot 2^{-m}$.
 מצא את ערכו של m ואת נקודת הקיצון של הפונקציה.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

- (17) (א) הראה כי לפונקציה: $f(x) = e^{2x-\sqrt{x}}$ יש נקודת קיצון כאשר $x = \frac{1}{16}$.
 (ב) הראה כי לפונקציה $g(x) = e^{2x+\sqrt{x}}$ יש נקודת פיתול כאשר $x = \frac{1}{16}$.
 (ג) העזר בחילוק פולינומים והראה כי לפונקציה $g(x)$ אין נקודות פיתול

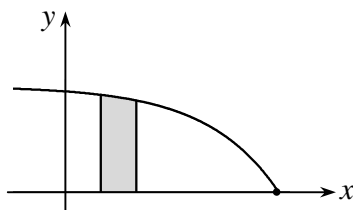
נוספות פרט לנקודה שצוינה בסעיף (ב).

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(18) לפינך סקיצה של גרף הפונקציה: $y = 1 - e^{x-3}$

- בתחום: $x \leq 3$. עבור איזה ערך של $m > 0$ השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישרים: $x = m$ ו- $x = 2m$ יהיה מקסימלי (בתשובתך רשום שלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית).



© גבי יקואל
הוצאת משבצת

פונקציות לוגריתמיות© גבי יקואל
הוצאת משבצת(19) נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cdot (x + 2) \cdot \ln x$ ($a \neq 0$).השיפוע של הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא: $4 + \ln 4$.(א) מצא את a .

(ב) חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך

עם הצירים, תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת(20) נתונה הפונקציה: $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

(א) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(ב) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(ג) מצא את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים.

(ד) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

(ה) רשום את תחומי העלייה ותחומי הירידה של הפונקציה.

(ו) מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה.

(ז) רשום את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.

(ח) תאר סקיצה של גרף הפונקציה.

sketch of the function graph© גבי יקואל
הוצאת משבצת(21) נתונה הפונקציה: $y = \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}$.

(א) מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה.

(ב) רשום את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.

(22) נתונה הפונקציה: $y = (x + 1) \cdot \ln^2(x + 1)$.

(א) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

(ב) מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת(23) נתונה הפונקציה: $y = (x - 1) \cdot \ln^3(x - 1)$.

(א) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

(ב) מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

$$(24) \text{ נתונה הפונקציה: } y = (\log_2 x)^2 .$$

- (א) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
(ב) מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה.

$$(25) \text{ נתונה הפונקציה: } y = \log_3^2(x+2) .$$

- (א) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 7$.
(ב) מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

$$(26) \text{ נתונה הפונקציה: } y = \ln(x^2 - 1) + \frac{1}{x^2 - 1} .$$

- (א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
(ב) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

$$(27) \text{ נתונה הפונקציה: } y = \ln \frac{e^{2x}}{x^2 - k} .$$

- בנקודה שבה $x = 1$ יש לפונקציה נקודת פיתול.
(א) מצא את ערכו של הפרמטר k .
(ב) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
(ג) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
(ד) מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה ורשום את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.
(ה) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

$$(28) \text{ נתונה הפונקציה: } y = 1 + \ln \frac{e^{-x}}{x^2 - a} .$$

- (א) עבור אילו ערכים של a הפונקציה מוגדרת לכל x .
(ב) עבור אילו ערכים של a ($a < 0$) הפונקציה יורדת לכל x ?

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

- להמשך פתרון השאלה הצב בפונקציה הנתונה $a = -1$.
(ג) מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה ורשום את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.
(ד) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(29) לפניך סקיצה של גרף הפונקציה: $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.

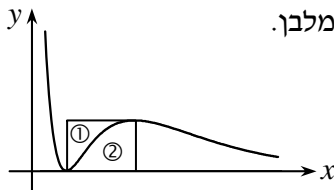
(א) בנקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה מעבירים ישרים מקבילים לצירים היוצרים מלבן.

מצא את משוואות המשיקים לגרף

הפונקציה בנקודות הקיצון.

(ב) באיזה יחס גרף הפונקציה מחלק

את שטח המלבן הנ"ל?



© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(30) השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה:

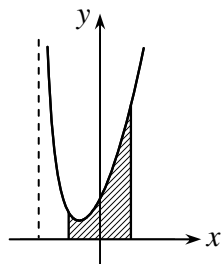
$$f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 6x + 3}{x + 2}, \text{ הישרים:}$$

$$x = -1, \quad (a > 0) \quad x = a$$

וציר ה- x (ראה ציור) הוא:

$$S = \frac{11}{6}a + 3\ln(a + 2) - \frac{7}{6}$$

מצא את a .



© גבי יקואל
הוצאת משבצת

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(31) נתונה הפונקציה: $y = \frac{2x}{x^2 + a}$ ($a > 0$) (ראה ציור).

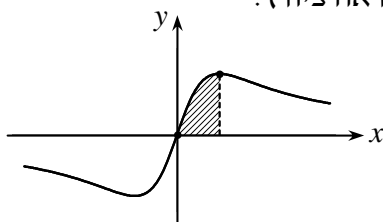
העבירו אנך לציר ה- x דרך נקודת

המקסימום של הפונקציה הנתונה.

מצא את השטח המוגבל על-ידי גרף

הפונקציה, ציר ה- x והאנך לציר ה- x

דרך נקודת המקסימום (השטח המקווקו שבציור).



© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(32) נתונה הפונקציה: $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה הנתונה, הישר $x = a$ ($a > 1$)

וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x . נפח גוף הסיבוב שנוצר הוא 9π .

מצא את a .

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(33) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

- (א) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום: $x > 0$.
 (ב) נתונים שני ישרים ברביע הראשון, המקבילים לציר ה- y . המרחק בין הישרים הוא 3 יחידות. חשב את השטח המינימלי הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, בין ציר ה- x ובין שני הישרים הללו.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

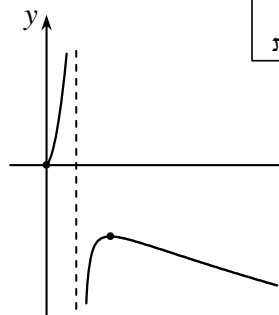
(34) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{\frac{8}{x}}$.

- (א) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום: $x > 0$.
 (ב) נתונים שני ישרים ברביע הראשון, המקבילים לציר ה- y . המרחק בין הישרים הוא 2 יחידות. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, בין ציר ה- x ובין שני הישרים הללו מסתובב סביב ציר ה- x . מצא את משוואות שני הישרים הללו ואת נפח גוף הסיבוב במקרה בו הנפח הוא מינימלי.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

תשובות

© גבי יקואל
הוצאת משבצת



(1) (א) $x \neq \frac{1}{16}, x \geq 0$

(ב) $\min(0,0), \max\left(\frac{16}{81}, -\frac{16}{27}\right)$

(ג) תחומי עלייה: $0 \leq x < \frac{1}{16}$, $\frac{1}{16} < x < \frac{16}{81}$

תחום ירידה: $x > \frac{16}{81}$.

(ד) $x = \frac{1}{16}$

(ה) ראה סקיצה משמאל:

(2) נקודות פיתול: $(-12, 4\sqrt[3]{3}), (12, 4\sqrt[3]{3})$

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

תחום קעירות כלפי מעלה: $-12 < x < 12$

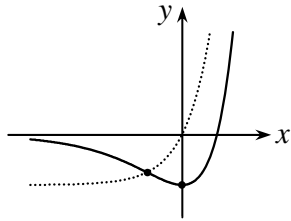
תחומי קעירות כלפי מטה: $x < -12, x > 12$

(3) (א) $b = 15, a = 18$ (ב) $(16, -16)$

(ג) תחומי עלייה: $0 \leq x < 1, x > 16$. תחום ירידה: $1 < x < 16$.

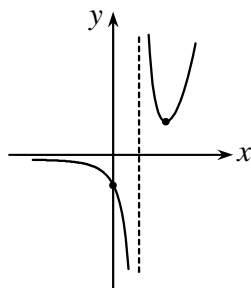
(4) (א) $S_{\max} = 9$ (ב) $t = 1$

(5) (ב) $S = \frac{5}{84}$



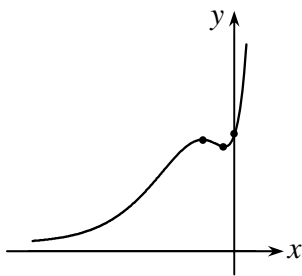
© גבי יקואל
הוצאת משבצת

- (6) (א) $\min(0, -1)$
 (ב) ראה סקיצה משמאל:
 (ג) $(-\ln 2, -0.75)$ (i)
 (ii) $1 - \ln 2$

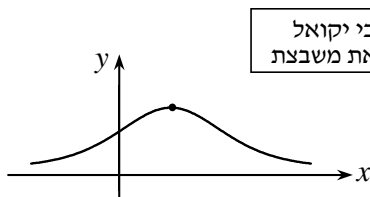


© גבי יקואל
הוצאת משבצת

- (7) (א) $x \neq 1$
 (ב) $\min\left(1 + \frac{1}{a}, a \cdot e^{a+1}\right)$
 (ג) $y = 0, x = 1$
 (ד) ראה סקיצה משמאל:
 (ה) $k = a \cdot e^{a+1}$ או $k < 0$

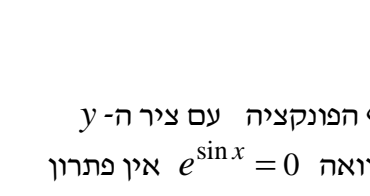


- (8) (א) מקסימום כאשר: $x = -1$
 מינימום כאשר: $x = k - 2$
 (ב) $y = 0$
 (ג) $(0, 1)$
 (ד) ראה סקיצה משמאל:



© גבי יקואל
הוצאת משבצת

- (9) (א) $(-1, 2e^{-2})$
 (ב) $y = 2e^{-2} \cdot (x + 2)$



© גבי יקואל
הוצאת משבצת

- (10) (א) $\max\left(1, \frac{1}{4e}\right)$
 (ב) ראה סקיצה משמאל:
 (ג) $a = 2$

פגיון א/א: (11)

- (א) נציב $x = 0$ ונקבל שנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y היא: $(0, 1)$. נציב $y = 0$ ומכיוון שלמשוואה $e^{\sin x} = 0$ אין פתרון נסיק שגרף הפונקציה לא חותך את ציר ה- x .

המשך בעמוד הבא <<<

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(ב) נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת לאפס: $y' = \cos x \cdot e^{\sin x} = 0$

הפתרון הכללי של המשוואה: $\cos x = 0$ הוא: $x = 0.5\pi + \pi \cdot n$

פתרונות המשוואה בתחום הנתון הם לפיכך: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$

נחשב את הנגזרת השנייה:

$$y'' = -\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos^2 x \cdot e^{\sin x} = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x)$$

נמצא את ערך הנגזרת השנייה בנקודות החשודות לקיצון ונקבל:

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \Rightarrow \max\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$$

$$y''\left(\frac{3\pi}{2}\right) > 0 \Rightarrow \min\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{1}{e}\right)$$

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

נבדוק את ערך הפונקציה בנקודות הקצה של תחום ההגדרה ובסביבה החד-צדדית של כל אחת מהן ונקבל שתי נקודות קיצון נוספות

$\min(0,1)$ ו- $\max(2\pi,1)$

לפיכך נקודת המקסימום המוחלט של הפונקציה היא: $\max\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$

ונקודת המינימום המוחלט של הפונקציה היא: $\min\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{1}{e}\right)$

נוכל כעת לרשום את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

תחומי עלייה: $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$. תחום ירידה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

(ג) נשווה את הנגזרת השנייה לאפס: $y'' = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x) = 0$

הפתרון הכללי של המשוואה: $\cos^2 x - \sin x = 0$

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

הוא: $x_1 = 0.212\pi + 2\pi \cdot n$, $x_2 = 0.788\pi + 2\pi \cdot n$

פתרונות המשוואה בתחום הנתון הם לפיכך: $x_1 = 0.212\pi$, $x_2 = 0.788\pi$

אלו שיעורי ה- x של הנקודות החשודות לפיתול. ניעזר בטבלת ערכים לבדיקת הפיתול ומציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.

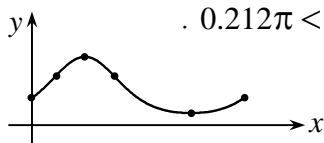
x	$0 < x < 0.212\pi$	0.212π	$0.212\pi < x < 0.788\pi$	0.788π	$0.788\pi < x < 2\pi$
y''	+	0	-	0	+
y	∪	1.855	∩	1.855	∪

נקודות פיתול: $(0.212\pi, 1.855)$, $(0.788\pi, 1.855)$

תחומי קעירות כלפי מעלה: $0 < x < 0.212\pi$, $0.788\pi < x < 2\pi$

תחום קעירות כלפי מטה: $0.212\pi < x < 0.788\pi$

(ד) ראה סקיצה משמאל:



© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(13) (א) $(0.712\pi, 1.855)$, $(1.288\pi, 1.855)$

(ב) תחומי קעירות כלפי מעלה \cup : $0 < x < 0.712\pi$, $1.288\pi < x < 2\pi$
 תחום קעירות כלפי מטה \cap : $0.712\pi < x < 1.288\pi$

(14) פגיון א/א:

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(א) נחשב את נגזרת הפונקציה : $y' = 2^{1-x^2} \cdot (-2x) \cdot \ln 2$

הביטוי 2^{1-x^2} חיובי לכל x . נשווה את הנגזרת לאפס ונקבל: $-2x = 0$ ומכאן: $x = 0$. ניעזר בטבלת ערכים:

x	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
y	\nearrow	2	\searrow
y'	+	0	-

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

ניתן לראות שבנקודה שבה $x = 0$ הפונקציה מקבלת מקסימום.
 ערך הפונקציה כאשר $x = 0$ הוא 2. כלומר: $\max(0, 2)$.

(ב) תחום עלייה: $x < 0$, תחום ירידה: $x > 0$.
 (ג) ערך הפונקציה כאשר $x = 1$ הוא 1.

ערך הנגזרת כאשר $x = 1$ הוא $y'(1) = 2^0 \cdot (-2) \cdot \ln 2 = -2 \ln 2$.
 משוואת המשיק תהיה: $y - 1 = -2 \ln 2 \cdot (x - 1)$. לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים נקבל: $y = -2x \cdot \ln 2 + 2 \ln 2 + 1$.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(15) (א) $\min(0.5, 2 - \sqrt[4]{10})$

(ב) תחום ירידה: $x < 0.5$, תחום עלייה: $x > 0.5$.

(16) $m = -\frac{1}{\ln 2}$, $\min(-1, -\frac{1}{e})$, $m = 1.232$ (18)

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(19) (א) $a = 2$

(ב) תחום הגדרה: $x > 0$. חיתוך עם הצירים: $(1, 0)$.

קעירות כלפי מעלה \cup : $x > 2$. קעירות כלפי מטה \cap : $0 < x < 2$.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(20) פגיון א/א:

(א) תחום ההגדרה של הפונקציה הוא: $x > 0$.

(ב) נשווה את המונה לאפס, ונקבל את נקודת החיתוך עם ציר ה- x : $(1, 0)$.
 אין נקודות חיתוך עם ציר ה- y .

(ג) לפונקציה שתי אסימפטוטות: $x = 0$ (אנכית) ו- $y = 0$ (אופקית).

המשך בעמוד הבא <<<

לפני שניגש לפתרון סעיף (ד) נחשב את הנגזרת הראשונה ואת הנגזרת השנייה של הפונקציה הנתונה.

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}$$

$$y'' = \frac{-\frac{1}{x} \cdot 2x\sqrt{x} - (2 - \ln x) \cdot 3\sqrt{x}}{4x^3} =$$

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

$$= \frac{-2\sqrt{x} - (2 - \ln x) \cdot 3\sqrt{x}}{4x^3} = \frac{-2 - 3 \cdot (2 - \ln x)}{4x^{2.5}}$$

(ד) נשווה את הנגזרת הראשונה לאפס, ונקבל: $\ln x = 2$: כלומר: $x = e^2$.

נחשב את ערך הנגזרת השנייה כאשר $x = e^2$: $y''(e^2) < 0$.

ערך הפונקציה כאשר $x = e^2$ הוא: $\frac{2}{e}$. **לסיכום:** $\max(e^2, \frac{2}{e})$.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(ה) תחום עלייה: $0 < x < e^2$, תחום ירידה: $x > e^2$.
פתרון סעיפים (ו) - (ז):

נשווה את הנגזרת השנייה לאפס ונקבל: $3 \cdot (2 - \ln x) = -2$.

פתרון המשוואה הוא: $x = 14.392$.

נבחר נקודה בתחום $0 < x < 14.392$, $x = 1$: $y''(1) < 0 \Rightarrow \cap$

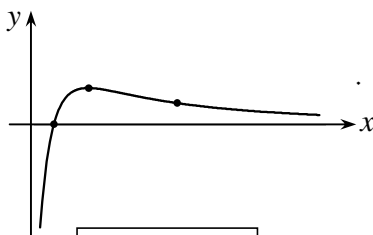
נבחר נקודה בתחום $x > 14.392$, $x = 20$: $y''(20) > 0 \Rightarrow \cup$

ערך הפונקציה בנקודה $x = 14.392$ הוא: 0.703 .
כלומר הנקודה $(14.392, 0.703)$ היא נקודת פיתול.

תחום קעירות כלפי מעלה \cup : $x > 14.392$.

תחום קעירות כלפי מטה \cap : $0 < x < 14.392$.

(ח) ראה סקיצה משמאל:



© גבי יקואל
הוצאת משבצת

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(21) (א) $(2.906, 0.215)$

(ב) תחום קעירות כלפי מעלה \cup : $x > 2.906$.

תחום קעירות כלפי מטה \cap : $0 < x < 2.906$.

(22) (א) $\min(0, 0)$, $\max(e^{-2} - 1, 4e^{-2})$ (ב) $(e^{-1} - 1, e^{-1})$

(23) (א) $\min(e^{-3} + 1, -27e^{-3})$ (ב) $(e^{-2} + 1, -8e^{-2})$, $(2, 0)$

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(א) (24) $\min(1,0)$ © גבי יקואל הוצאת משבצת

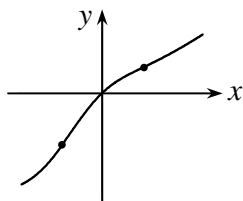
(א) (25) $y = 0.405x + 1.165$ (ב) $(e, \frac{1}{\ln^2 2})$

(ב) $(e-2, \frac{1}{\ln^2 3})$

(א) תחום הגדרה: $x < -1, x > 1$

(ב) נקודות קיצון: $\min(-\sqrt{2},1), \min(\sqrt{2},1)$

© גבי יקואל הוצאת משבצת



(א) (27) $k = -1$ (ב) כל x

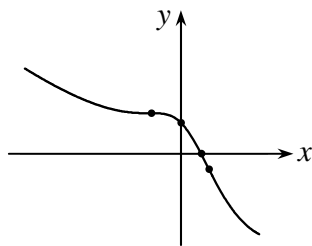
(ג) אין נקודות קיצון.

(ד) $(-1, \ln \frac{1}{2e^2}), (1, \ln \frac{e^2}{2})$

$x < -1, x > 1 \cup$

$-1 < x < 1 \cap$

(ה) ראה סקיצה משמאל:



© גבי יקואל הוצאת משבצת

(א) (28) $a < 0$ (ב) $a \leq -1$

(ג) $(-1, 1.307), (1, -0.693)$

$x < -1, x > 1 \cup$

$-1 < x < 1 \cap$

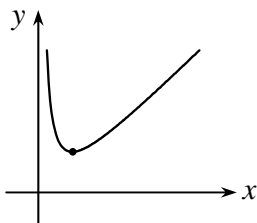
(ד) ראה סקיצה משמאל:

(א) (29) $y = \frac{4}{e^2}, y = 0$ (ב) $\frac{①}{②} = \frac{e^2 - 3}{2e^2}$

(32) $a = e^3$

(31) $S = \ln 2$

(30) $a = 1$



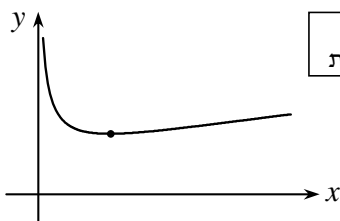
© גבי יקואל הוצאת משבצת

(א) (33) ראה סקיצה משמאל:

(ב) מקבלים שמשוואות הישרים

הן: $x = 1$ ו- $x = 4$.
השטח המינימלי הוא:

$S_{\min} = 7.5 + 4 \cdot \ln 4$



© גבי יקואל הוצאת משבצת

(א) (34) ראה סקיצה משמאל:

(ב) מקבלים שמשוואות הישרים

הן: $x = 2$ ו- $x = 4$.
הנפח המינימלי הוא:

$V_{\min} = \pi \cdot (6 + 4 \cdot \sqrt{8} + 8 \cdot \ln 2)$