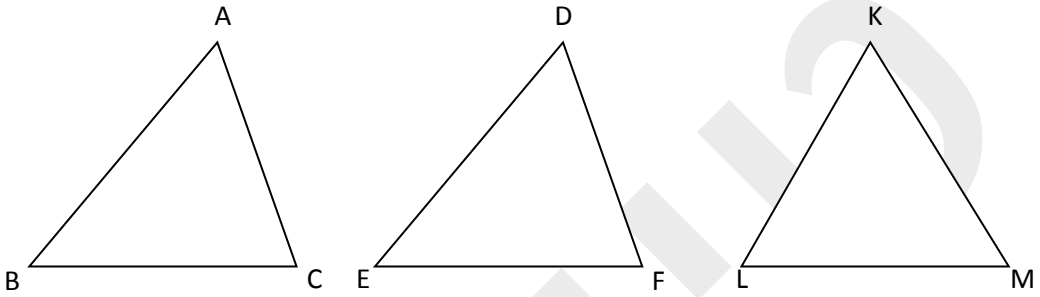
משולשים חופפים, תיכון במשולש ומשולש שווה שוקיים
(14 שעות)

שתי צורות נקראות חופפות אם אפשר להניח אחת מהן על האחרת כך שתכסה אותה בדיוק (לשם כך ניתן להזיז, לסובב ולהפוך את הצורות).

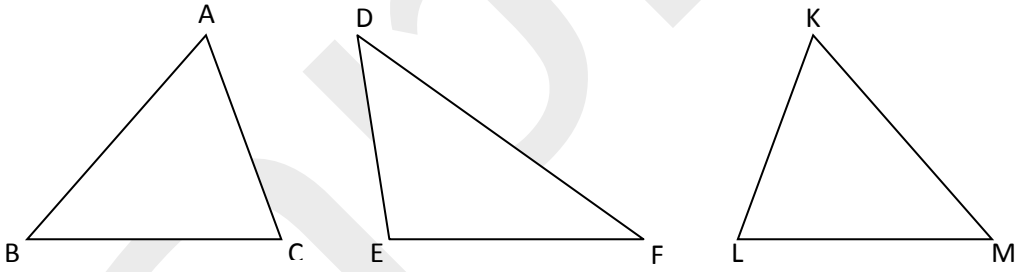
למידה

בפרק זה נתמקד במשולשים חופפים.

1. היעזרו בהעתקת המשולשים DEF ו- KLM על נייר שקוף ובדקו איזה מהמשולשים חופף למשולש ABC.

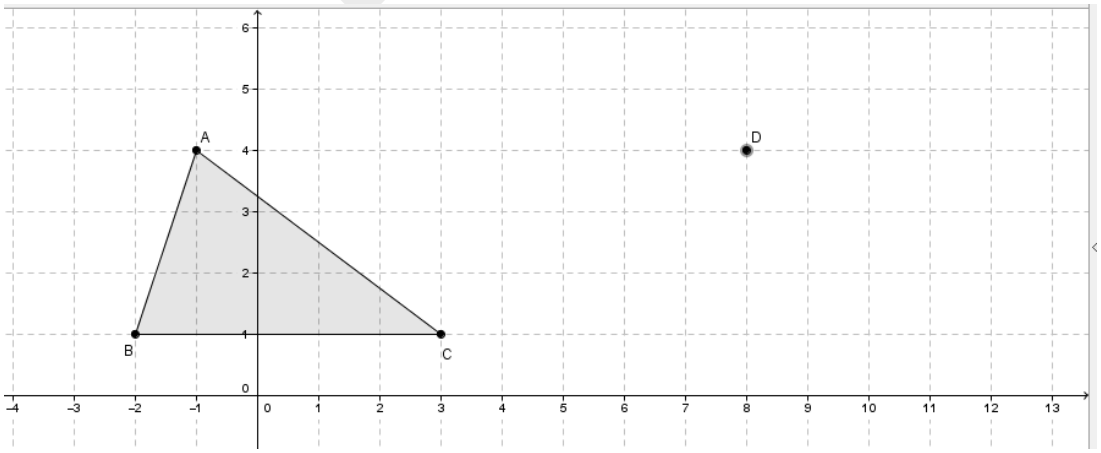


2. היעזרו בהעתקת המשולשים DEF ו- KLM על נייר שקוף ובדקו איזה מהמשולשים חופף למשולש ABC.

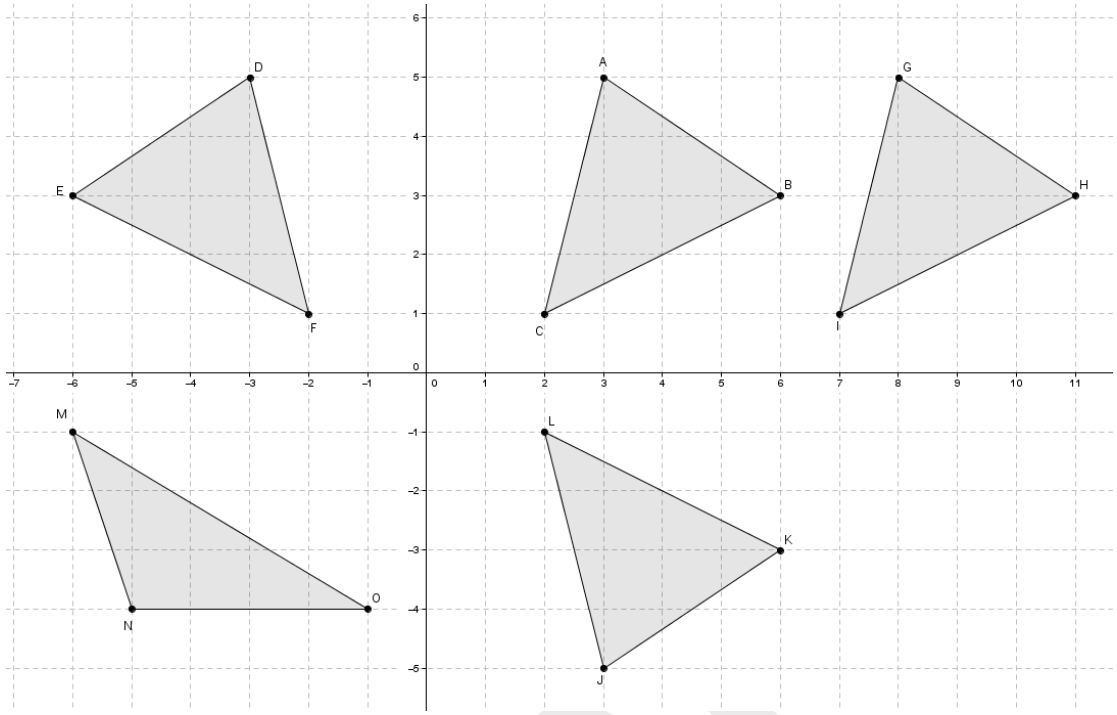


3. א. שרטטו במערכת הצירים משולש חופף למשולש ABC כך שאחד הקודקודים שלו הוא הנקודה D.

ב. כמה משולשים כאלה אפשר לשרטט?

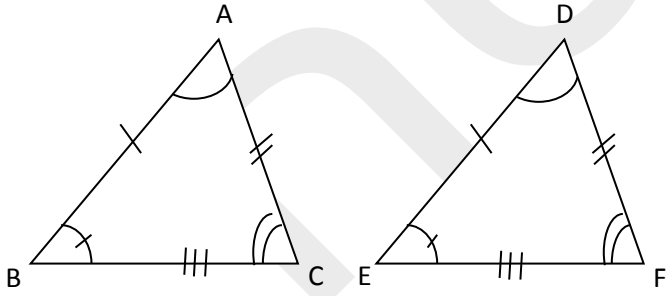


4. במערכת הצירים שלפניכם משורטטים משולשים, אילו משולשים חופפים למשולש ABC?



אם המשולשים ABC ו- DEF חופפים, אז הכתיבה המקובלת לסימון החפיפה היא $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

במשולשים חופפים כל הצלעות שוות זו לזו וכל הזוויות שוות זו לזו.



AB = DE

AC = DF

BC = EF

$\sphericalangle A = \sphericalangle D$

$\sphericalangle B = \sphericalangle E$

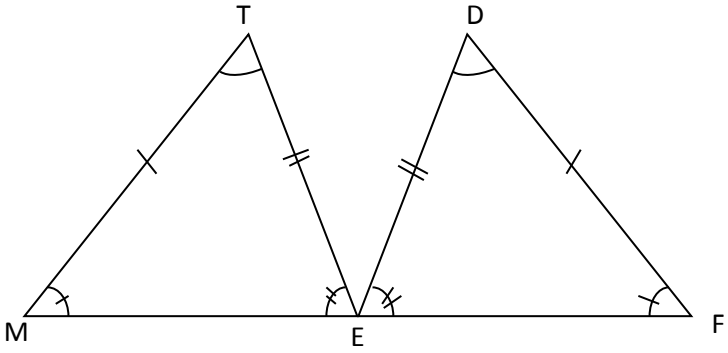
$\sphericalangle C = \sphericalangle F$

וגם להיפך, אם בשני משולשים כל הצלעות שוות זו לזו וכל הזוויות שוות זו לזו, אז המשולשים חופפים.

נהוג ונוח לרשום את המשולשים עם התאמת קודקודים (לא הכרחי).

תרגול

1. E אמצע הקטע MF. לפי הסימונים על השרטוט נמקו מדוע המשולשים שבציור חופפים זה לזה ורשמו את החפיפה בכתיב מתמטי.



דוגמאות לפתרון התרגילים

פתרון:

ME = EF (נתון E אמצע הקטע MF)

TE = DE, TM = DF (נתון)

∢D = ∢T, ∢M = ∢F, ∢TEM = ∢DEF (נתון)

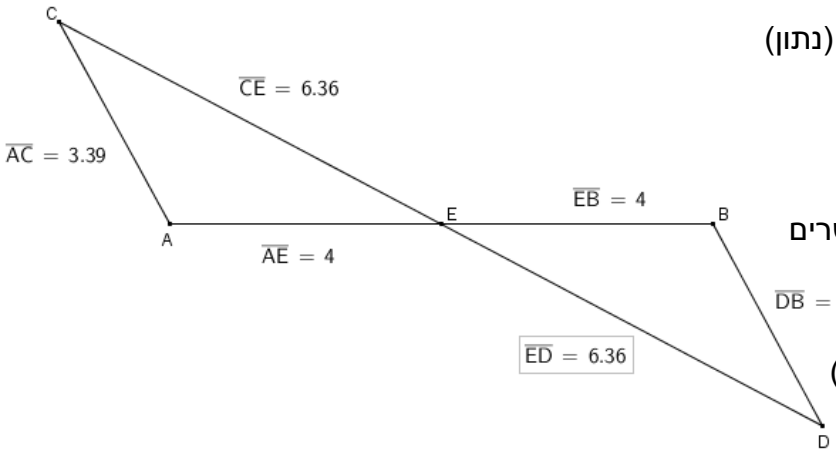
⇓

ΔTME ≅ ΔDFE

2. AB ו- CD קטעים הנחתכים בנקודה E כך שנוצרים משולשים שהאורכים של הצלעות שלהם רשומים על גבי השרטוט.

בנוסף נתון: AC || BD.

נמקו מדוע המשולשים שבציור חופפים זה לזה ורשמו את החפיפה בכתיב מתמטי.



פתרון:

AE = EB, AC = BD, CE = ED (נתון)

AC || BD (נתון)

⇓

∢C = ∢D, ∢A = ∢B

(זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים)

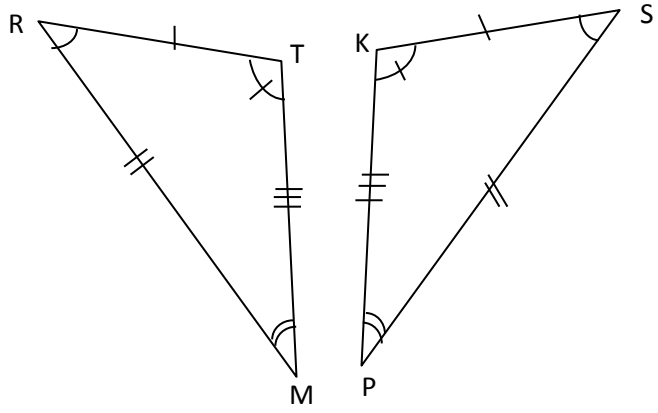
∢CEA = ∢BED

(זוויות קודקודיות שוות זו לזו)

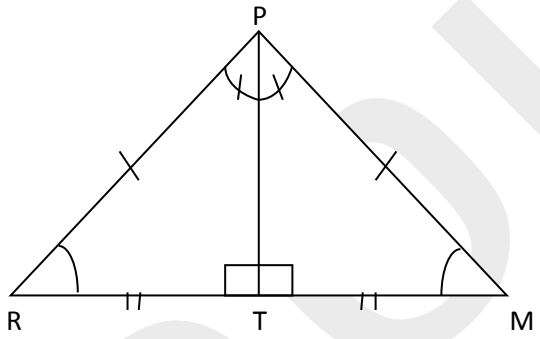
⇓

ΔACE ≅ ΔBDE

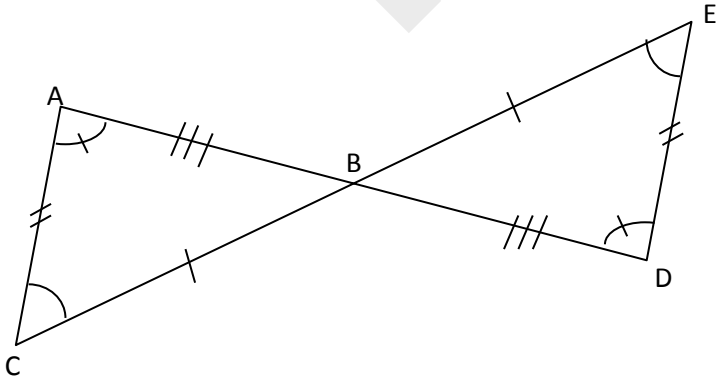
3. לפי הסימונים על השרטוט נמקו מדוע המשולשים שבציור חופפים זה לזה ורשמו את החפיפה בכתיב מתמטי.



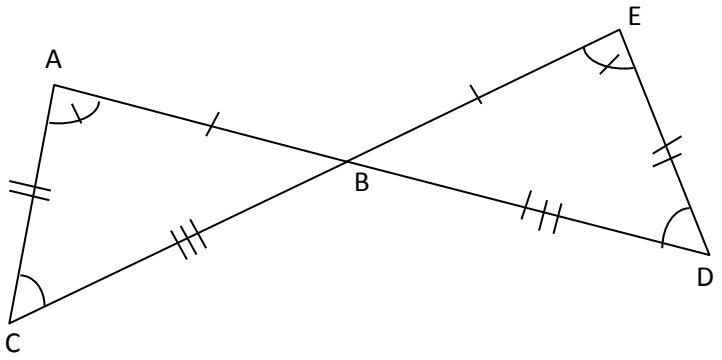
4. לפי הסימונים על השרטוט נמקו מדוע המשולשים שבציור חופפים זה לזה ורשמו את החפיפה בכתיב מתמטי.



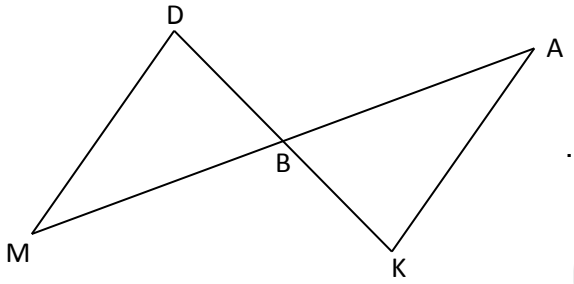
5. AD ו- FC קטעים ישרים הנחתכים בנקודה B. לפי הסימונים על השרטוט נמקו מדוע המשולשים שבציור חופפים זה לזה ורשמו את החפיפה בכתיב מתמטי.



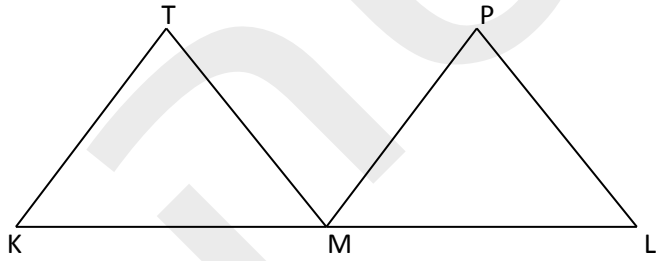
6. AD ו- EC קטעים ישרים הנחתכים בנקודה B. לפי הסימונים על השרטוט נמקו מדוע המשולשים שבציור חופפים זה לזה ורשמו את החפיפה בכתיב מתמטי.
שימו לב להבדל בין תרגיל 5 לתרגיל 6.



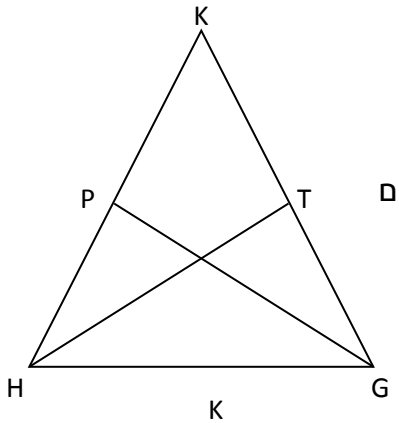
7. AM ו- DK הם קטעים ישרים הנחתכים בנקודה B.
AK || DM, B אמצע AM, B אמצע DK, AK = MD
סמנו את הנתונים על גבי השרטוט
נמקו מדוע המשולשים שבציור
חופפים זה לזה ורשמו את החפיפה בכתיב מתמטי.



8. KM קו ישר
M אמצע KL
TK = PM
TM = PL
$\sphericalangle T = \sphericalangle P$
TM || PL ,TK || PM
סמנו את הנתונים על גבי השרטוט נמקו מדוע המשולשים שבציור
חופפים זה לזה ורשמו את החפיפה בכתיב מתמטי.



בנק נימוקים: צלע משותפת, זוויות קודקודיות שוות זו לזו, זווית משותפת, זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים, זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים, קטע משותף.

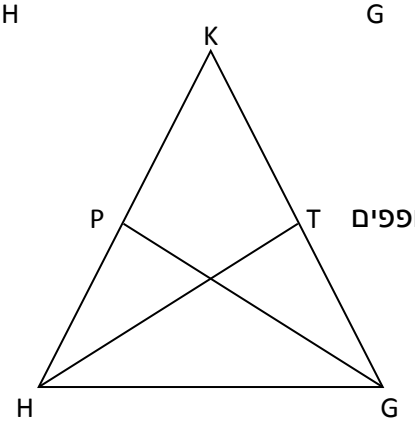


9. נתון משולש KHG. $PG = TH$,$PH = TG$

$\sphericalangle H = \sphericalangle G$

HT, GP הם חוצי הזוויות H, ו- G בהתאמה.

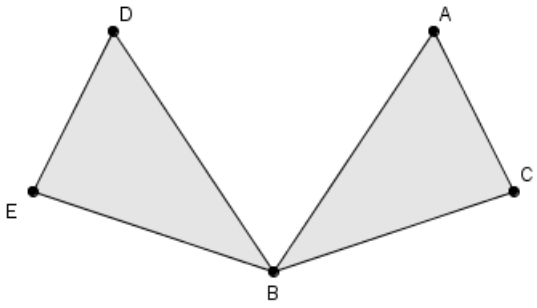
סמנו את הנתונים בשרטוט, קבעו מיהם המשולשים החופפים נמקו מדוע המשולשים שקבעתם חופפים זה לזה ורשמו את החפיפה בכתיב מתמטי.



10. נתון משולש KHG. $KP = KT$,$PG = TH$,$KH = KG$

$\sphericalangle KPG = \sphericalangle KTH$

סמנו את הנתונים בשרטוט קבעו מיהם המשולשים החופפים נמקו מדוע המשולשים שקבעתם חופפים זה לזה ורשמו את החפיפה בכתיב מתמטי.



11. נתון: $\Delta ABC \cong \Delta DBE$ בהתאמה.

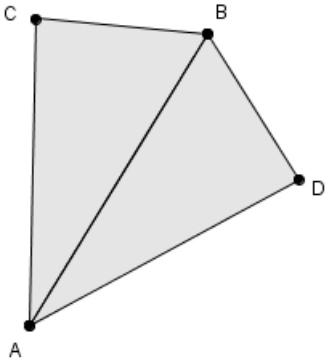
א. רשמו שלושה זוגות של זוויות שוות זו לזו.

ב. רשמו שלושה זוגות של צלעות שוות זו לזו.

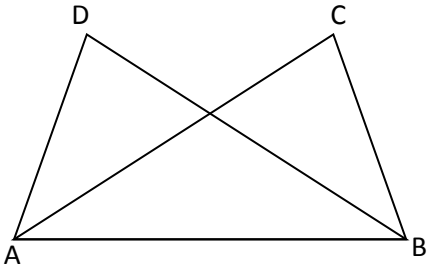
12. נתון: $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ בהתאמה.

א. רשמו שלושה זוגות של זוויות שוות זו לזו.

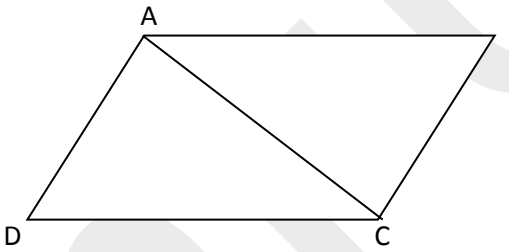
ב. רשמו שני זוגות של צלעות שוות זו לזו – שימו לב, הצלע AB היא צלע משותפת לשני המשולשים.



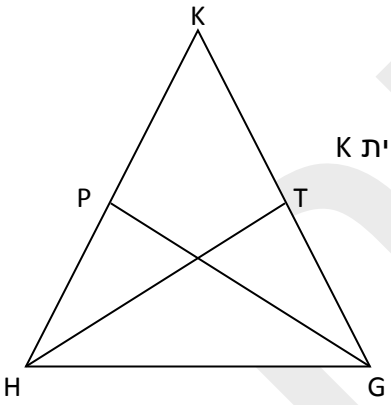
13. נתון: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ בהתאמה.
א. רשמו שלושה זוגות של זוויות שוות זו לזו.
ב. רשמו שני זוגות של צלעות שוות זו לזו – שימו לב, הצלע AB היא צלע משותפת לשני המשולשים.



14. נתון: $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ בהתאמה.
א. רשמו שלושה זוגות של זוויות שוות זו לזו.
ב. רשמו שני זוגות של צלעות שוות זו לזו – שימו לב, הצלע AC היא צלע משותפת לשני המשולשים.

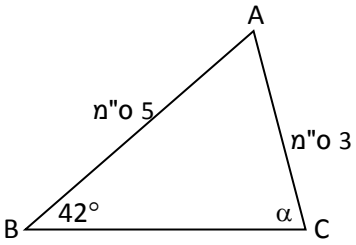


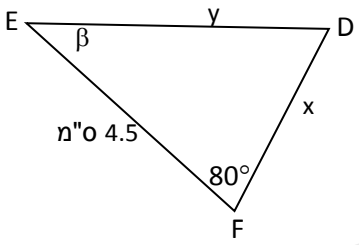
15. נתון: $\Delta KPG \cong \Delta KTH$ בהתאמה.
א. רשמו שלושה זוגות של צלעות שוות זו לזו.
ב. רשמו שני זוגות של זוויות שוות זו לזו – שימו לב, זווית K היא זווית משותפת לשני המשולשים.



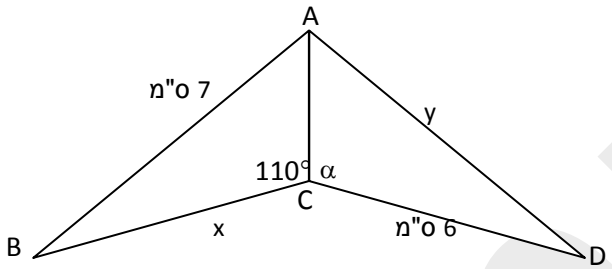
16. בסעיפים הבאים מצאו את הערכים של הצלעות ו/או הזוויות המסומנות (x, y, α, β) על סמך החפיפה:

א. נתון: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ בהתאמה.

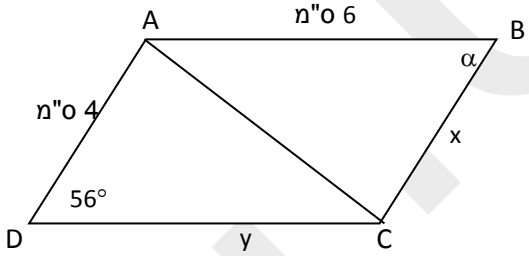




ב. נתון: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ בהתאמה.



ג. נתון: $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ בהתאמה.



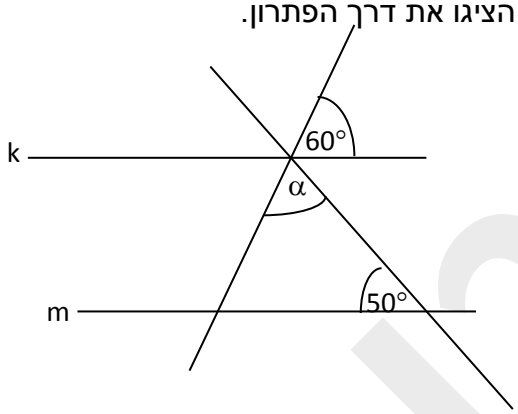
נחזור ונזכור....

17. נתון: 5 ס"מ = AB, 3 ס"מ = BC, איזה מהאורכים הבאים יכול להתאים לצלע AC כדי שיתקבל משולש ABC? נמקו.
א. 7 ס"מ ב. 8 ס"מ ג. 8.5 ס"מ ד. 9 ס"מ

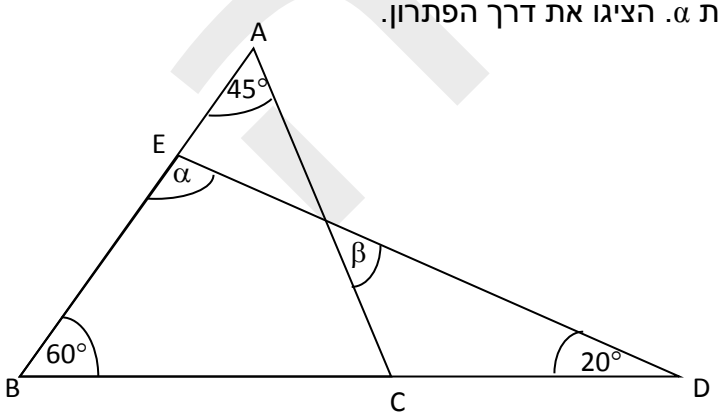
18. נתונות הזוויות: $\sphericalangle ABC = 70°$, $\sphericalangle ACB = 60°$. איזה גודל מהגדלים הבאים יכול להתאים להיות הגודל של $\sphericalangle BAC$ כדי שיתקבל משולש ABC? נמקו.
א. $80°$ ב. $70°$ ג. $60°$ ד. $50°$

19. במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות בת $20°$. מה גודלה של הזווית החדה הנוספת?

20. נתון: m || k. חשבו את הגודל של זווית α. הציגו את דרך הפתרון.



21. לפניכם צורה המורכבת מארבעה קטעים ישרים: AB, AC, BD, ED
א. חשבו את הגודל של זווית α. הציגו את דרך הפתרון.

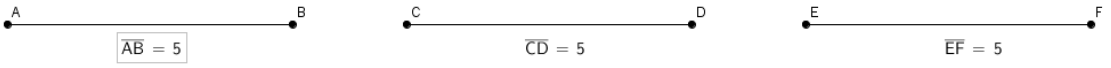


ב. מה גודלה של זווית β?
I. $20°$
II. $45°$
III. $55°$
IV. $60°$

למידה

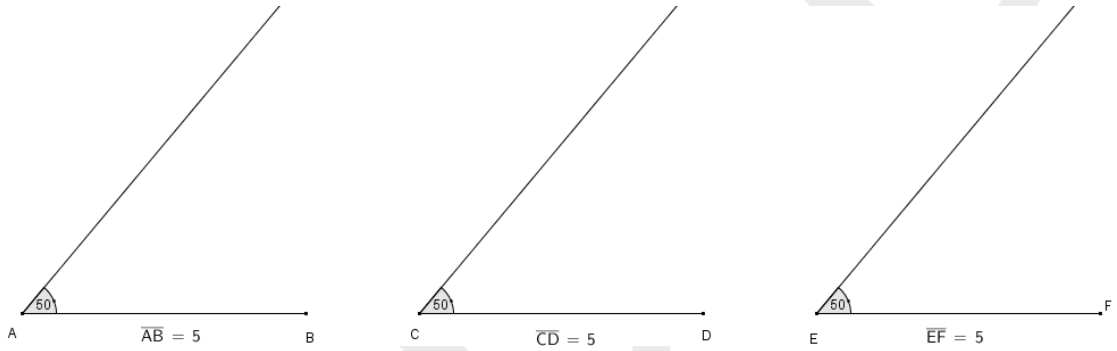
האם אפשר להסתפק בפחות נתונים כדי להוכיח שהמשולשים חופפים?

1. שרטטו שלושה משולשים שאינם חופפים זה לזה כשאחת הצלעות של כל משולש היא בת 5 ס"מ: משולש ABK, משולש CDM, משולש EFL



מסקנה: שוויון של נתון אחד - צלע אחת לא מבטיח שיתקבלו משולשים חופפים.

2. שרטטו שלושה משולשים שאינם חופפים זה לזה כשאחת הצלעות של כל משולש היא בת 5 ס"מ ואחת הזוויות בת °50: משולש ABK, משולש CDM, משולש EFL.

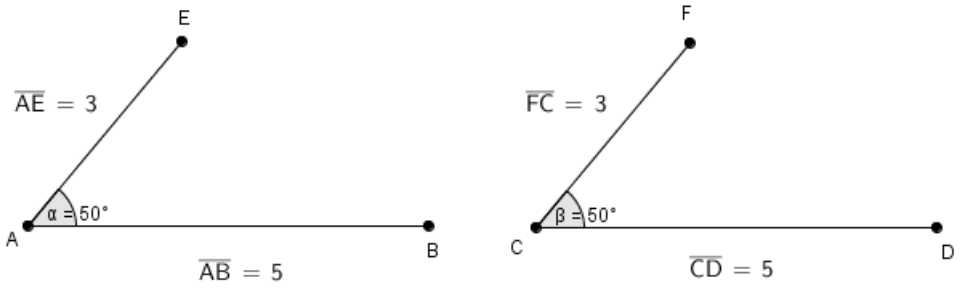


מסקנה: שוויון של שני נתונים - צלע אחת וזווית אחת לא מבטיח שיתקבלו משולשים חופפים.

3. היעזרו במד זווית. שרטטו שלושה משולשים שאינם חופפים זה לזה כשבכל משולש שלוש זוויות: זווית אחת בת °50, זווית שנייה בת °60 וזווית שלישית בת °70.

מסקנה: שוויון של שלושה נתונים שהם שלוש זוויות לא מבטיח שיתקבלו משולשים חופפים.

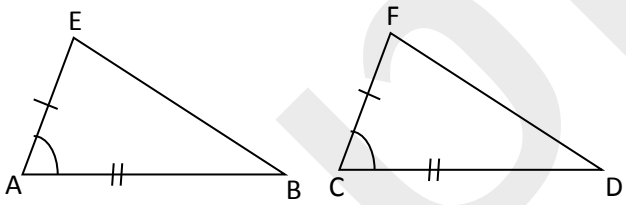
4. שרטטו משולשים AEB ו- CFD כשבכל משולש צלע אחת בת 5 ס"מ, צלע אחרת בת 3 ס"מ והזווית ביניהן בת 50°:



העתיקו על נייר שקוף את אחד המשולשים והניחו על המשולש השני.
מה תוכלו לומר על שני המשולשים?_____

שלושה נתונים – **שתי צלעות והזווית ביניהן** - מבטיחים לקבל משולש יחיד ולכן שני המשולשים שהתקבלו – חופפים זה לזה.

חפיפה על פי צלע-זווית-צלע (צז"צ): אם שתי צלעות במשולש אחד שוות לשתי צלעות במשולש אחר, וגם הזוויות הכלואות בין הצלעות שוות זו לזו, אז המשולשים חופפים.



בכתיב מתמטי:
AE = CF (נתון)
AB = CD (נתון)
∢A = ∢C (נתון)
⇓
ΔAEB ≅ ΔCFD על פי צז"צ.
המסקנות מהחפיפה: EB = FD, ∢E = ∢F, ∢B = ∢D
במשולשים חופפים מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ומול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.

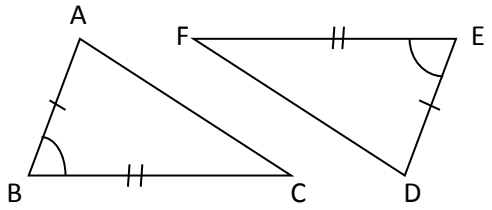
https://sites.google.com/site/mathamakimtavor/zelazavitzela

תרגול

1. לפניכם זוגות של משולשים חופפים.
חלק מהנתונים מסומנים בשרטוטים וחלקם נתונים בכתיב מתמטי.
רשמו:
- שלושה נתונים שמאפשרים להראות חפיפת משולשים לפי משפט החפיפה צז"צ
- את המשולשים החופפים לפי התאמת הקודקודים
- רשמו את כל הזוגות הנוספים של צלעות שוות וזוויות שוות.

דוגמה

א. נתון:



$DE = AB$

$EF = BC$

$\sphericalangle E = \sphericalangle B$

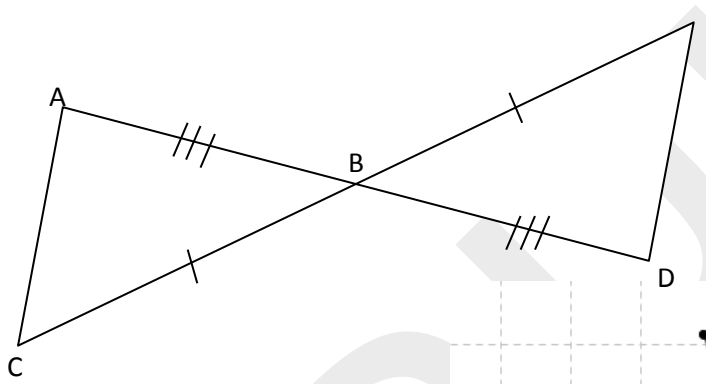
$\Downarrow$

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (עפ"י צז"צ)

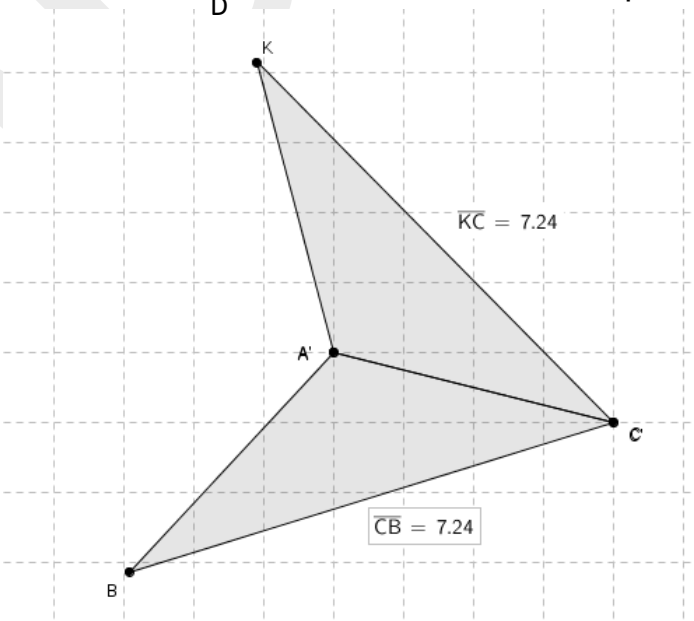
$\Downarrow$

$FD = AC$, $\sphericalangle D = \sphericalangle A$, $\sphericalangle C = \sphericalangle F$ (מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ולהיפך)

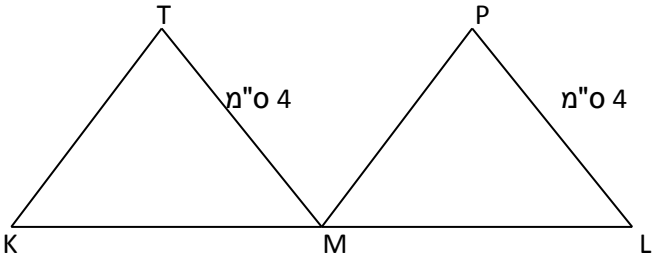
ב. נתון: AD ו- CE קטעים של קוים ישרים הנחתכים בנקודה B.



ג. נתון AC חוצה זווית KCB

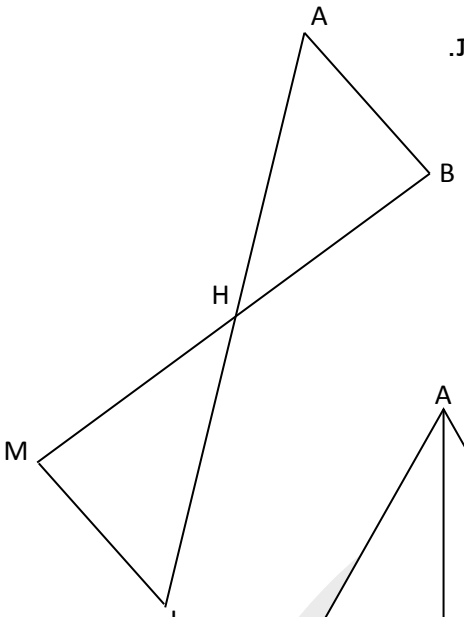


ד. נתון: M אמצע KL
TM || PL

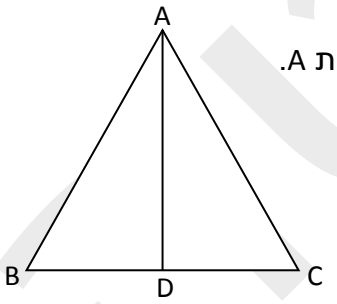


2. לפניכם זוגות של משולשים חופפים.
חלק מהנתונים מסומנים בשרטוטים וחלקם נתונים בכתיב מתמטי.
רשמו:
- שלושה נתונים המאפשרים להראות חפיפת משולשים לפי משפט החפיפה צז"צ.
- את המשולשים החופפים לפי התאמת הקודקודים
- רשמו את כל הזוגות הנוספים של צלעות שוות וזוויות שוות.

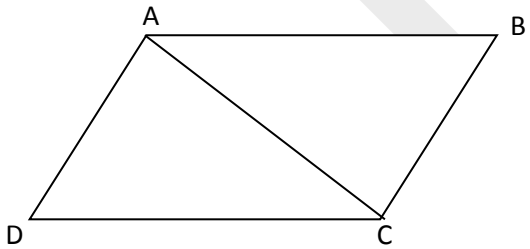
א. נתון: AJ ו- MB קטעים הנחתכים בנקודה H.
הנקודה H היא אמצע הקטע AJ ואמצע הקטע MB



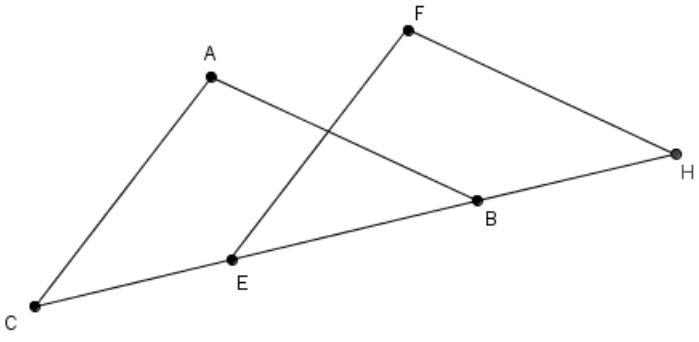
ב. נתון: במשולש ABC AB = AC, AD חוצה זווית A.



ג. נתון: AB || CD, AB = CD

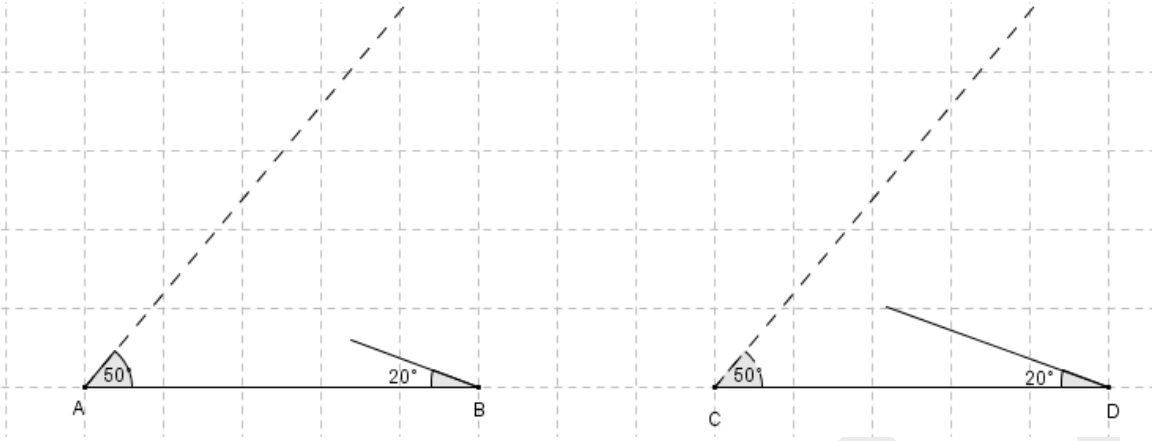


ד. נתון: EF || AC, AC = FE, CE = BH



למידה

שרטטו משולשים AEB ו- CFD כשבכל משולש זווית אחת בת 50°, זווית שנייה בת 20° והצלע ביניהן בת 5 ס"מ:

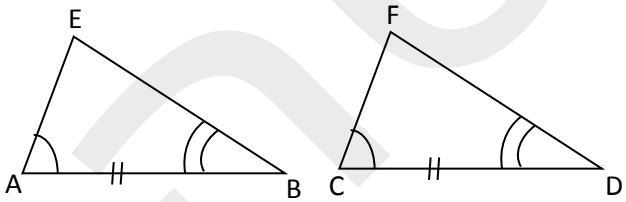


העתיקו על נייר שקוף את אחד המשולשים והניחו על המשולש השני.
מה תוכלו לומר על שני המשולשים?_____

שלושה נתונים – **שתי זוויות והצלע ביניהן** - מבטיחים לקבל משולש יחיד ולכן שני המשולשים שהתקבלו – חופפים זה לזה.

חפיפה על פי זווית-צלע-זווית (זצ"ז): אם שתי זוויות במשולש אחד שוות לשתי זוויות במשולש אחר, וגם הצלעות הכלואות בין שתי הזוויות שוות זו לזו, אז המשולשים חופפים.

בכתיב מתמטי:



AB = CD (נתון)

∢A = ∢C (נתון)

∢B = ∢D (נתון)

⇓

$\Delta AEB \cong \Delta CFD$ על פי זצ"ז.

המסקנות מהחפיפה AE = CF, EB = FD, ∢E = ∢F

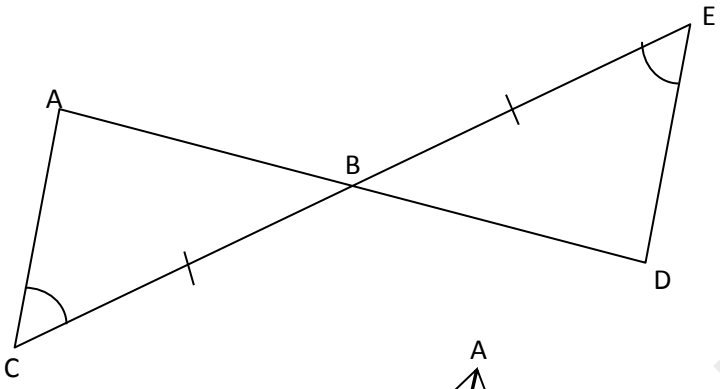
במשולשים חופפים מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ומול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.

https://sites.google.com/site/mathamakimtavor/zavitzelazavit

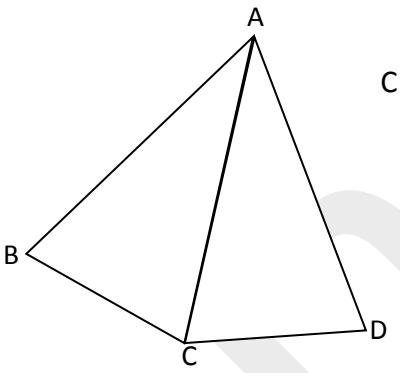
תרגול

3. לפניכם זוגות של משולשים חופפים.
חלק מהנתונים מסומנים בשרטוטים וחלקם נתונים בכתיב מתמטי.
רשמו:
- שלושה נתונים המאפשרים להראות חפיפת משולשים לפי משפט החפיפה זצ"ז.
- את המשולשים החופפים לפי התאמת הקודקודים
- רשמו את כל הזוגות הנוספים של צלעות שוות וזוויות שוות.

א. נתון: AD ו- CE
קטעים הנחתכים בנקודה B.

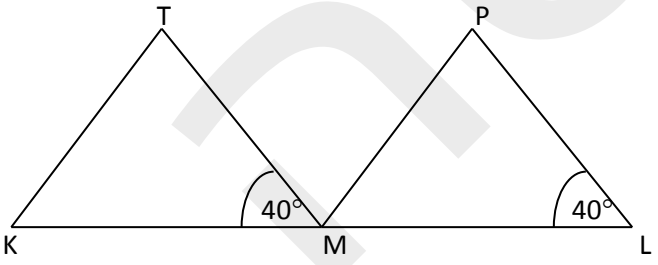


ב. נתון: AC חוצה זווית A וגם חוצה זווית C

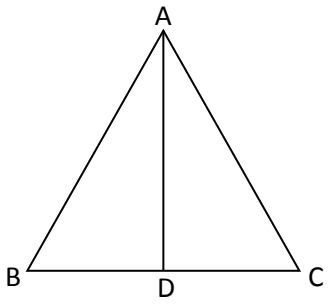


ג. נתון: M אמצע הקטע KL

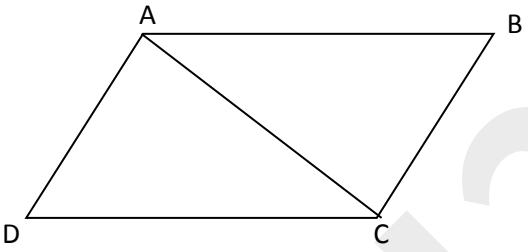
$\sphericalangle TKM = \sphericalangle PML$



4. לפניכם זוגות של משולשים חופפים.
חלק מהנתונים מסומנים בשרטוטים וחלקם נתונים בכתיב מתמטי.
רשמו:
- שלושה נתונים המאפשרים להראות חפיפת משולשים לפי משפט החפיפה זצ"ז.
- את המשולשים החופפים לפי התאמת הקודקודים
- רשמו את כל הזוגות הנוספים של צלעות שוות וזוויות שוות.

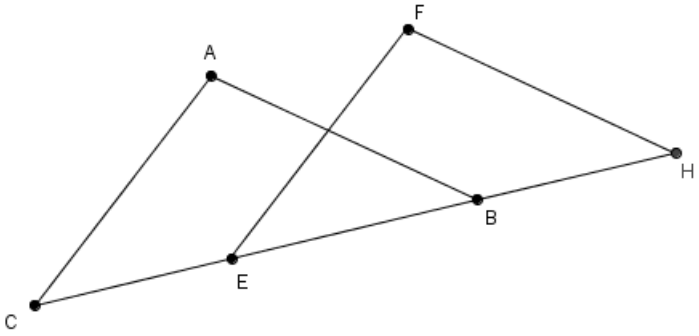


א. נתון: $AD \perp BC$, AD חוצה זווית A.



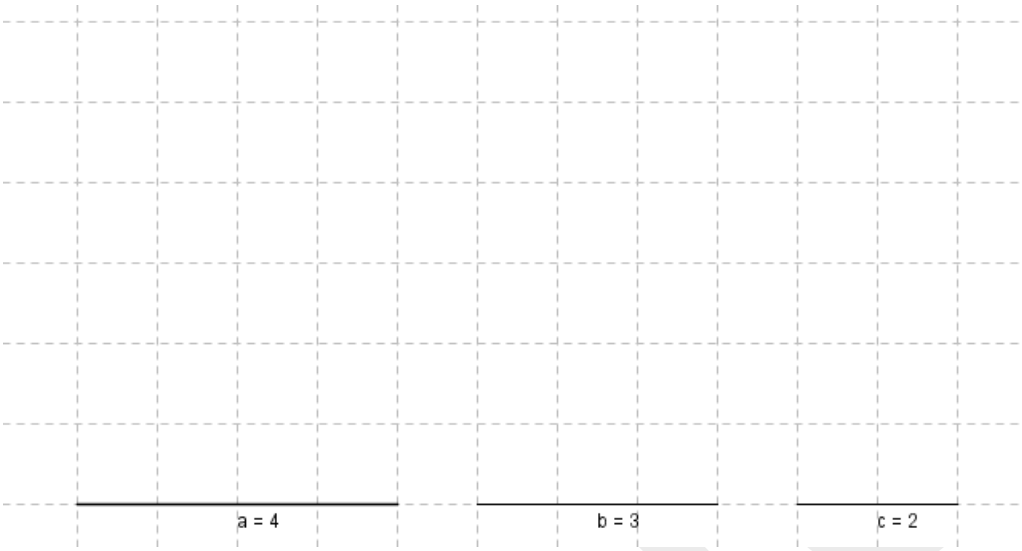
ב. נתון: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$

ג. נתון: $AC \parallel EF$, $AB \parallel FH$, $CE = BH$



למידה

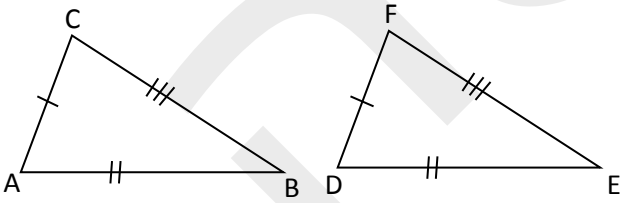
נתונים אורכים של שלוש צלעות של משולש: a, b , c.
שרטטו שני משולשים ABC ו- DEF כשצלעות כל אחד מהמשולשים הן הצלעות הנתונות:



העתיקו על נייר שקוף את אחד המשולשים והניחו על המשולש השני.
מה תוכלו לומר על שני המשולשים?_____

שלושה נתונים – **שלוש צלעות** - מבטיחים לקבל משולש יחיד ולכן שני המשולשים שהתקבלו – חופפים זה לזה.

חפיפה על פי צלע-צלע-צלע (צצ"צ): אם שלוש צלעות במשולש אחד שוות לשלוש צלעות במשולש אחר, אז המשולשים חופפים.



בכתיב מתמטי:
AB = DE (נתון)
AC = DF (נתון)
BC = EF (נתון)
⇓
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ על פי צצ"צ.

המסקנות מהחפיפה $\sphericalangle A = \sphericalangle C$, $\sphericalangle E = \sphericalangle F$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D$

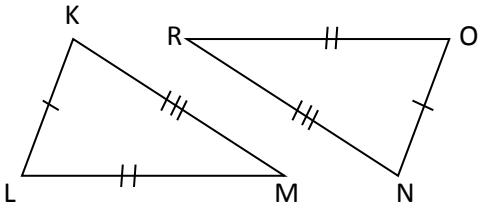
במשולשים חופפים מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות.

https://sites.google.com/site/mathamakimtavor/zelazelazela

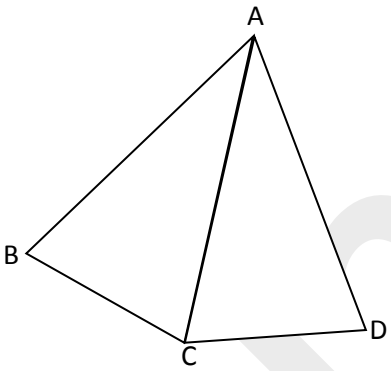
תרגול

5. לפניכם זוגות של משולשים חופפים.
חלק מהנתונים מסומנים בשרטוטים וחלקם נתונים בכתיב מתמטי.
רשמו:
- שלושה נתונים המאפשרים להראות חפיפת משולשים לפי משפט החפיפה צצ"צ
- את המשולשים החופפים לפי התאמת הקודקודים

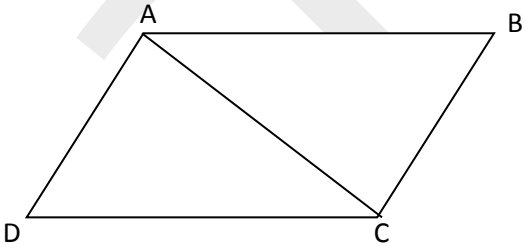
א.



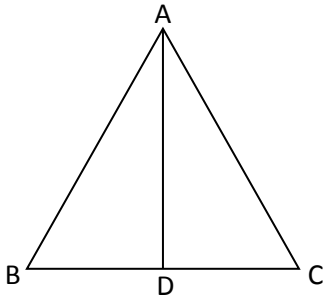
ב. נתון: $AD = AB$, $BC = CD$



ג. נתון: $DC = AB$, $BC = AD$



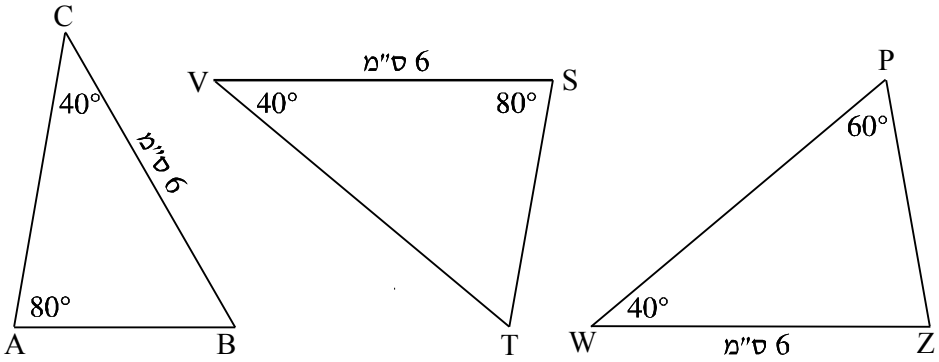
ד. D אמצע BC, $AC = AB$



תרגול

<u>תרגילים משולבים</u>

1. **רק שניים** מבין שלושת המשולשים שלפניכם חופפים.



א. שני המשולשים החופפים הם: _____ Δ ו- _____ Δ.

ב. מהו משפט החפיפה שעל-פיו שני המשולשים שרשמתם בסעיף א' חופפים?

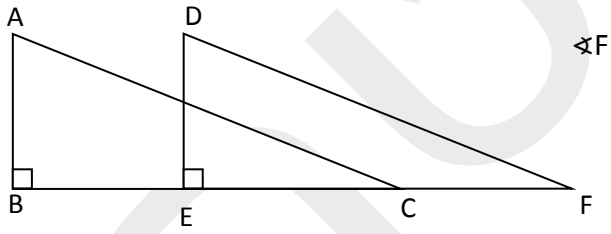
☐1 צלע, צלע, צלע

☐2 צלע, זווית, צלע

☐3 זווית, צלע, זווית

2. המשולשים ABC ו- DEF הם משולשים חופפים בהתאמה.

נתון: $DE \perp EF$, $AB \perp BC$, $\sphericalangle F = 20°$



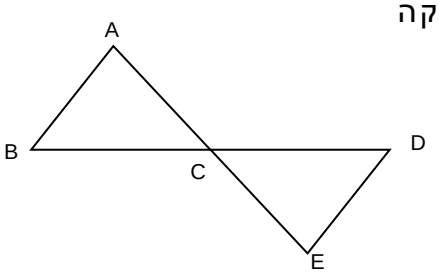
א. איזו מבין הזוויות הבאות שווה לזווית F?

(1) $\sphericalangle A$ (2) $\sphericalangle D$ (3) $\sphericalangle ACF$ (4) $\sphericalangle ACB$

ב. חשבו את גודל זווית A.

<u>כתבו</u> את המשפט שעליו הסתמכתם.

ג. חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle ACF$. נמקו.



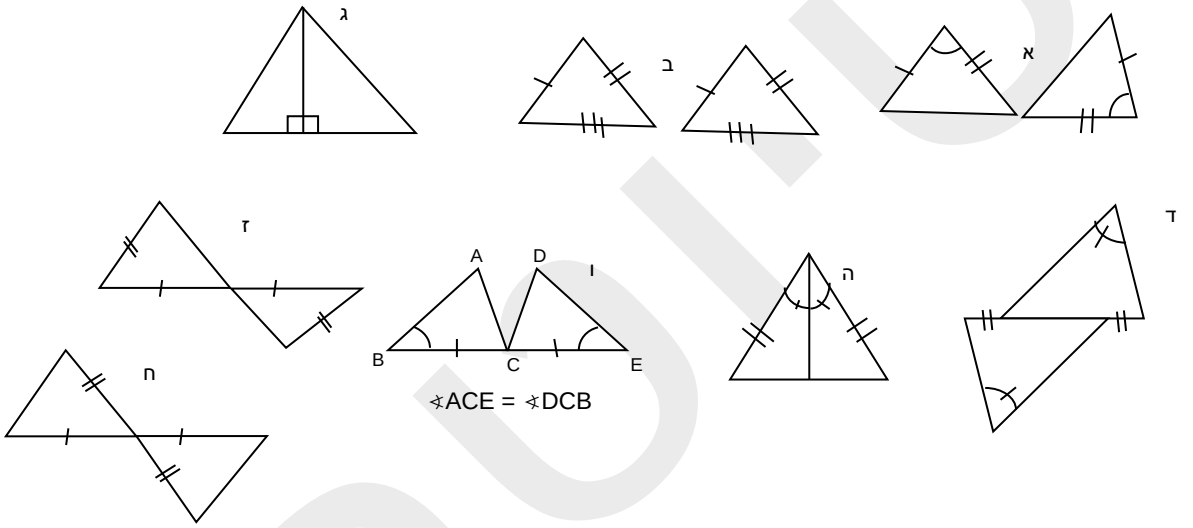
3. משולשים ABC ו-EDC חופפים זה לזה.

נתון: AB || DE ,BC = CD

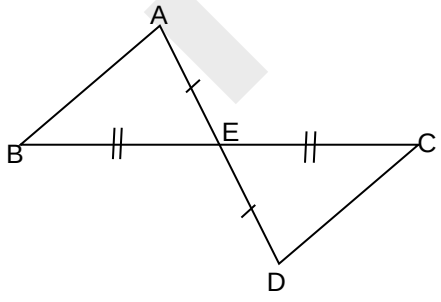
א. איזו צלע במשולש EDC שווה לצלע AC?

ב. האם זווית A שווה לזווית E או לזווית D? נמקו.

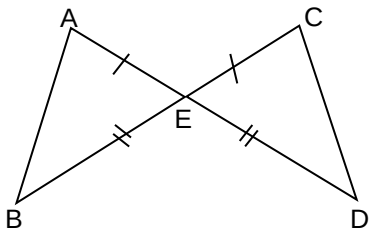
4. נתונים זוגות של משולשים. קבעו באילו מהזוגות המשולשים חופפים ולפי איזה משפט (צלעות וזוויות שוות מסומנים באיור). אם המשולשים אינם חופפים יש להביא דוגמה נגדית עם מידות קונקרטיות (באמצעות סרגל ומד זווית):



5. AD ו- BC קטעים נחתכים. באיזה מהשרטוטים אפשר להסיק כי ∢D= ∢B? נמקו.



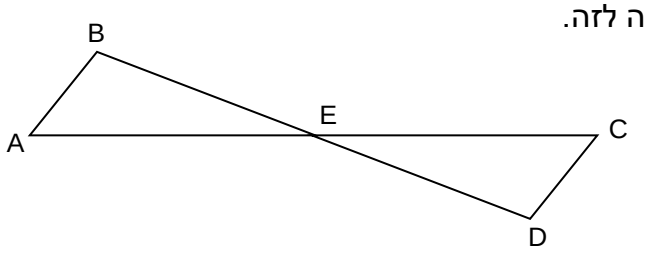
נתון: AE = DE, BE = CE



נתון: AE = CE, BE = DE

6. באיור הבא נתון כי: AC ו- BD קטעים נחתכים, AB || DC, ו- AB = DC.

נמקו מדוע המשולשים ABE ו- CDE חופפים זה לזה.



השלימו ונמקו:

AE = _____

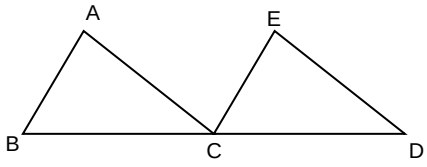
BE = _____

7. לפניכם שני משולשים: ABC ו-ECD.

נתון: EC||AB, ED||AC, C אמצע הקטע BD.

קבעו אם המשולשים חופפים ואם כן,

ציינו לפי איזה משפט ולפי אילו נימוקים.



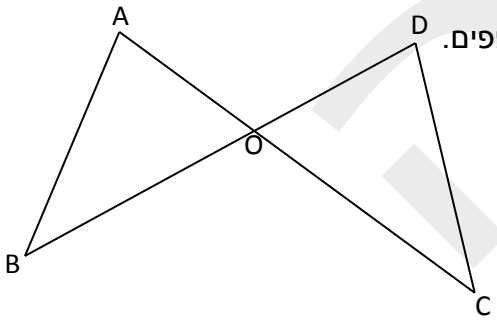
אם המשולשים חופפים השלימו: _____ = AB, _____ = AC

נמקו את קביעתכם.

8. בשרטוט שלפניכם שני הקטעים AC ו- BD נחתכים בנקודה O.

נתון: BO = OC , AO = OD

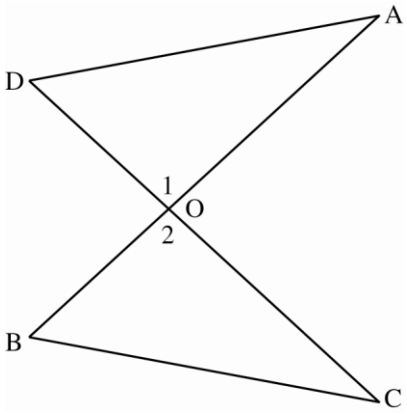
א. כִּתבו לפי איזה משפט חפיפה המשולשים AOB ו- DOC חופפים.



ב. סַמנו ב–☒ ליד כל טענה אם היא **בהכרח נכונה** או **לא בהכרח נכונה**.

	הטענה	בהכרח נכונה	לא בהכרח נכונה
.1	DC = AB	☐1	☐2
.2	∢C = ∢A	☐1	☐2
.3	BD = AC	☐1	☐2

9. הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה O.



נתון: $\sphericalangle A = \sphericalangle C$

א.לפניכם הוכחה לכך ש- $\sphericalangle B = \sphericalangle D$.

הַשלימו את הנימוקים החסרים בהוכחה.

$\sphericalangle A = \sphericalangle C$ נתון

$\sphericalangle O_1 = \sphericalangle O_2$ כי _____

$\Downarrow$

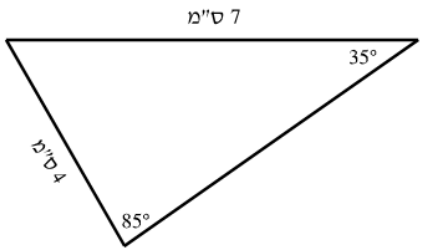
$\sphericalangle B = \sphericalangle D$ כי _____

ב.נתון גם: AD = BC

הַשלימו:

המשולשים AOD ו- COB חופפים לפי משפט החפיפה: _____

10.לפניכם בסיס משולש של קופסת סוכריות:

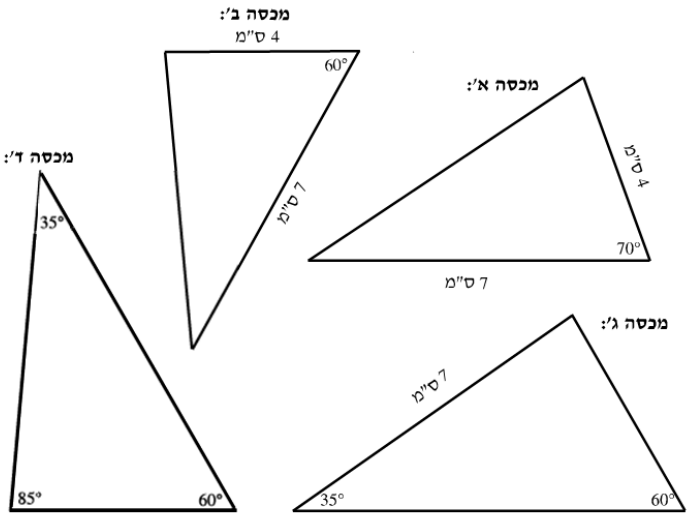


בשרטוטים הבאים מתוארים מכסים לקופסאות של סוכריות.

איזה מבין המכסים **חופף בוודאות** לבסיס הקופסה?

בחרו את המכסה המתאים לפי הנתון בסרטוטים, ורִשְמו

באיזה משפט חפיפה נעזרתם כדי לבחור בו.



תשובה: המכסה המתאים הוא_____.

משפט החפיפה הוא_____.

זווית חיצונית למשולש

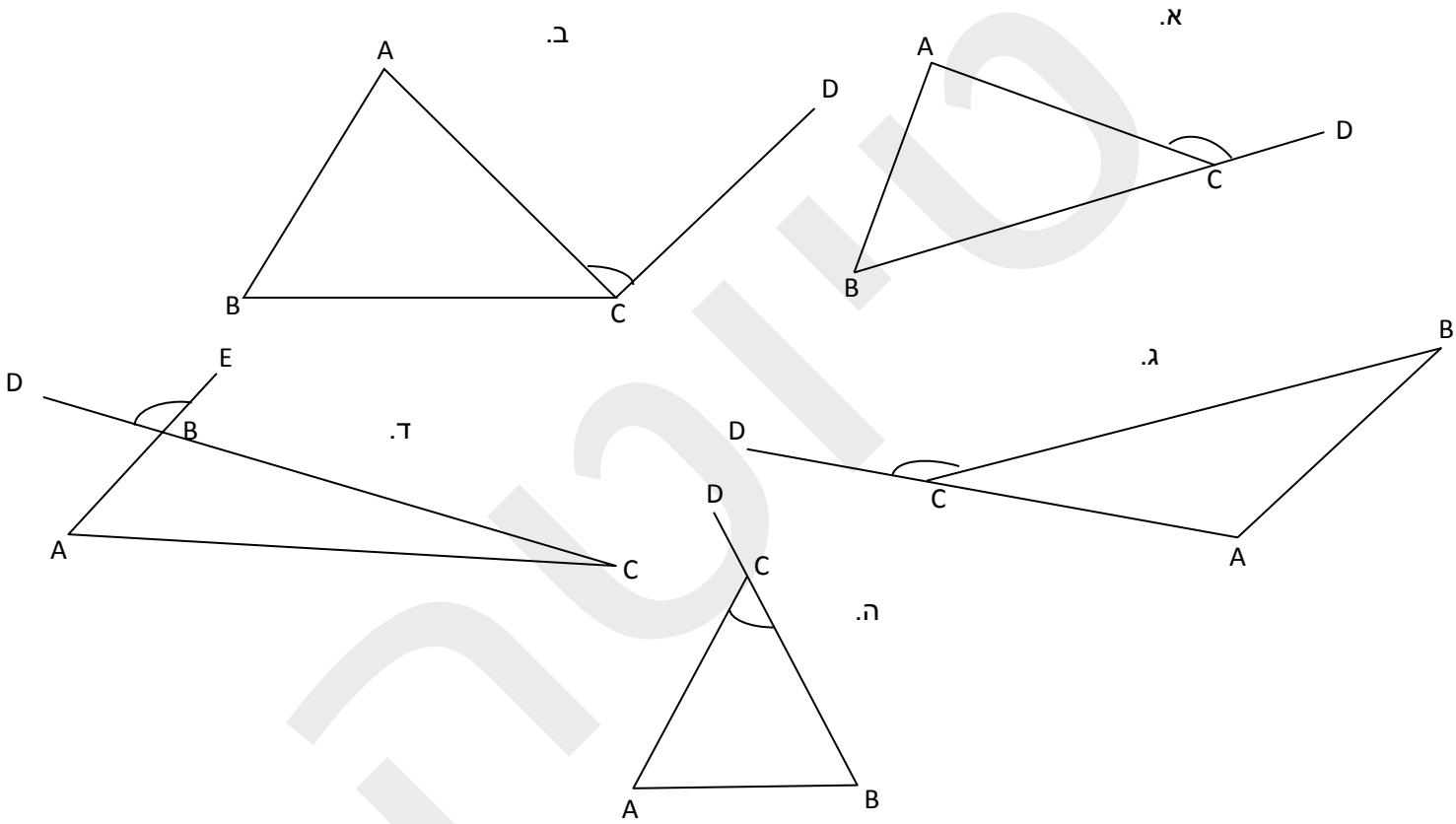
למידה

במשולשים א,ג,ד,ה הנקודה D נמצאת על המשך הצלע BC.

במשולש ד הנקודה E נמצאת על המשך הצלע AB.

בכל אחד מהמשולשים מסומנת זווית.

סמנו את המשולשים שבהם הזווית המסומנת היא זווית צמודה לזווית פנימית של המשולש.

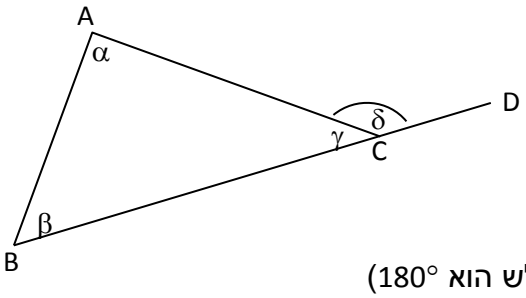


זווית נקראת **זווית חיצונית למשולש** אם היא צמודה לזווית פנימית של המשולש.

זווית חיצונית למשולש משלימה ל 180° את הזווית הפנימית הצמודה לה.

טענה: זווית חיצונית למשולש משלימה ל 180° את הזווית הפנימית הצמודה לה ולכן שווה לסכום הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

הוכחת הטענה:



נתון משולש ABC.

הנקודה D על המשך הצלע BC.

δ זווית חיצונית למשולש ABC

צ"ל: $\alpha + \beta = \delta$

הוכחה: $180° = \gamma + \boxed{\alpha + \beta}$ (סכום זוויות במשולש הוא $180°$)

$\Downarrow$

$\boxed{\alpha + \beta} = 180° - \gamma$

$180° = \gamma + \boxed{\delta}$ (סכומן של זוויות צמודות הוא $180°$)

$\boxed{\delta} = 180° - \gamma$

$\Downarrow$

$\alpha + \beta = \delta$ (טרנזיטיביות) מ.ש.ל

דיון:

- כמה זוויות חיצוניות יש למשולש?
- לאיזה משולש יש זווית חיצונית אחת ישרה?
- לאיזה משולש יש זווית חיצונית אחת חדה?
- לאיזה משולש יש שלוש זווית חיצונית קהה?

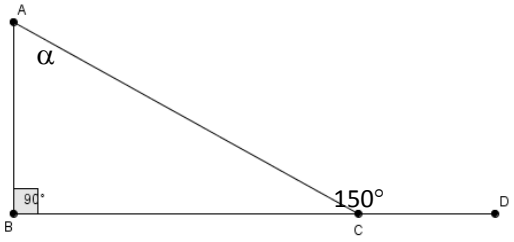
טענה: זווית חיצונית למשולש שווה לסכום הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה ולכן גדולה מכל אחת מהזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

נמקו מדוע הטענה נכונה.

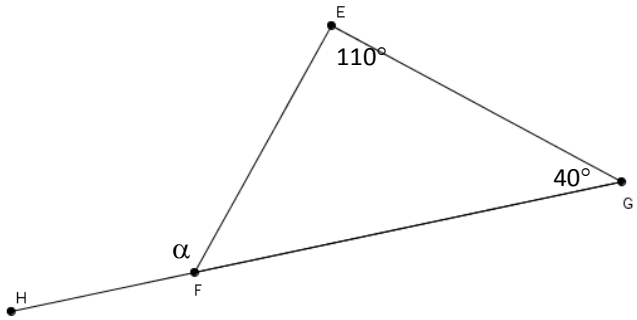
תרגול

1. חשבו את הגודל של α בכל אחד מהמשולשים הנתונים:

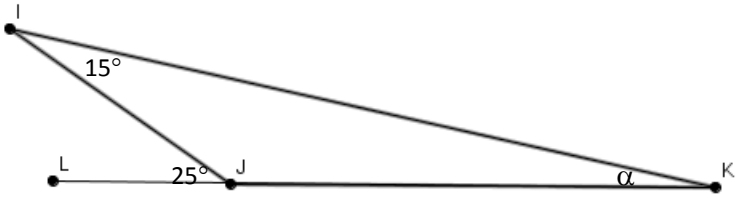
א.



ב.

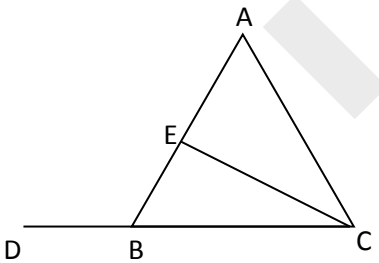


ג.



2. נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על המשך BC.

הנקודה E על הצלע AB.



השלימו:

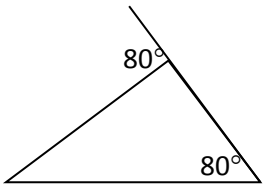
∢DBA היא זווית חיצונית למשולש _____

∢AEC היא זווית חיצונית למשולש _____

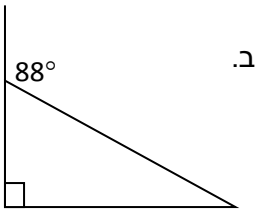
∢BEC היא זווית חיצונית למשולש _____

3. נמקו מדוע הנתונים בכל אחד מהשרטוטים הבאים הם בלתי אפשריים:

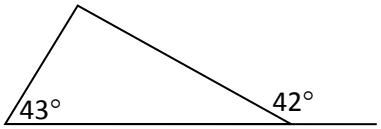
א.



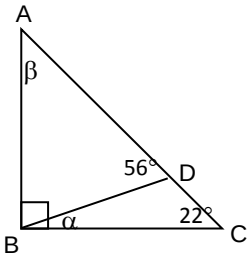
ב.



ג.



4. נתון משולש ישר זווית ABC. D נקודה על הצלע AC.

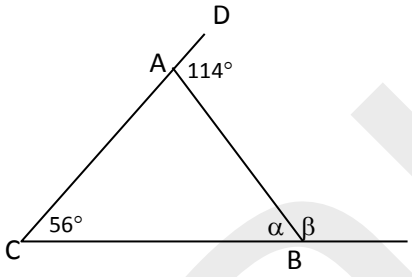


א. חשבו את גודל הזוויות α, β על פי הנתונים בשרטוט.

ב. נמקו כל שלב בחישוב.

5. נתון משולש ABC. D נקודה על המשך הצלע AC.

E נקודה על המשך הצלע CB

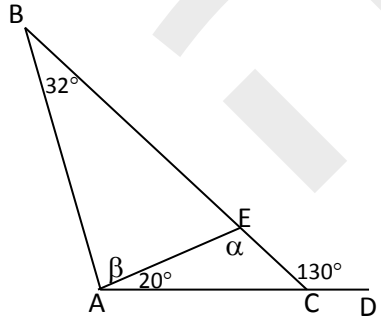


א. חשבו את גודל הזוויות α, β על פי הנתונים בשרטוט.

ב. נמקו כל שלב בחישוב.

6. נתון משולש ABC. D נקודה על המשך הצלע AC.

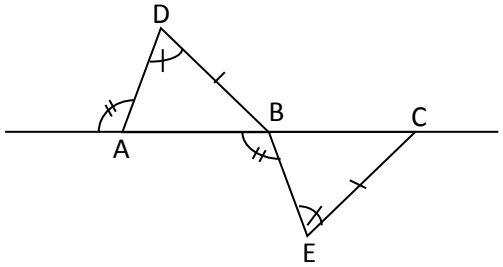
E נקודה על הצלע CB



א. חשבו את גודל הזוויות α, β על פי הנתונים בשרטוט.

ב. נמקו כל שלב בחישוב.

7. על הישר AC בנו שני משולשים: ABD, BEC
נמקו באמצעות הנתונים בשרטוט
מדוע המשולשים הנתונים חופפים.



למידה

תיכון למשולש

בכיתה ז' הכרנו שני קווים שעוברים בתוך משולש:

חוצה זווית במשולש, גובה במשולש.

חוצה זווית הוא קטע שיוצא מקדקוד המשולש וחוצה את הזווית לשני חלקים שווים.

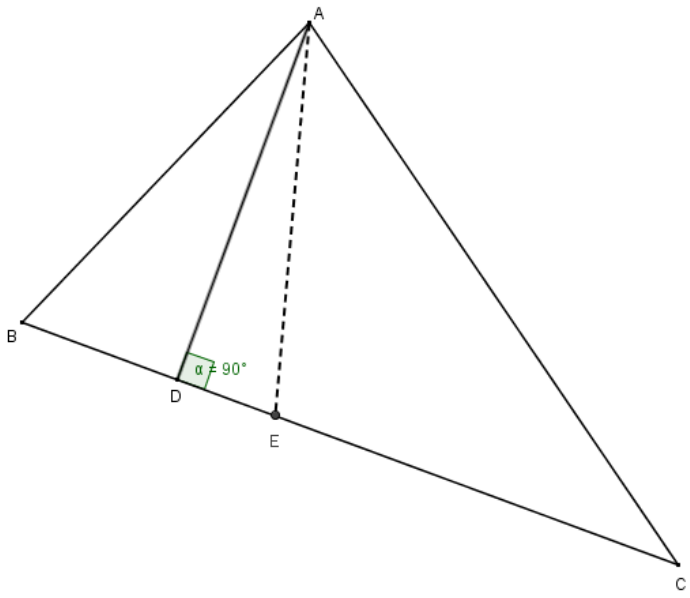
גובה הוא קטע שקצה אחד שלו בקדקוד והקצה האחר על הצלע שמולו או על המשכה והוא מאונך לצלע זאת.

אם במשולש ABC נתון: $AD \perp BC$

אז AD הוא גובה המשולש.

אם במשולש ABC נתון: $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BAE$

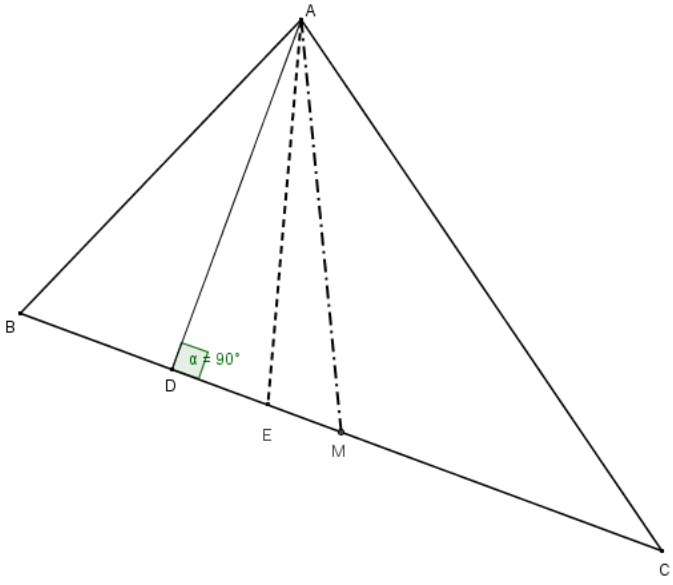
אז AE הוא חוצה הזווית A של המשולש.



תיכון במשולש הוא הקטע המחבר קדקוד במשולש עם **אמצע** הצלע שמולו.

אם הנקודה M היא אמצע הצלע BC אז

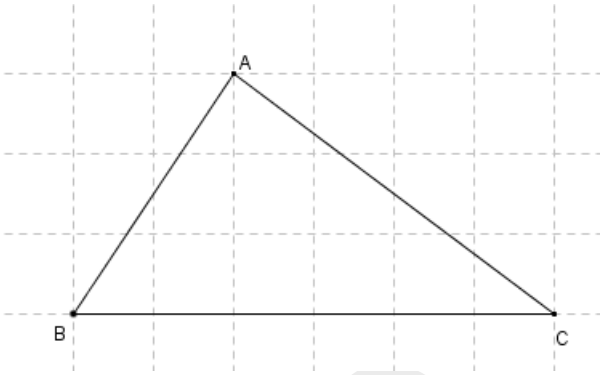
הקטע AM הוא **תיכון לצלע** BC במשולש ABC.



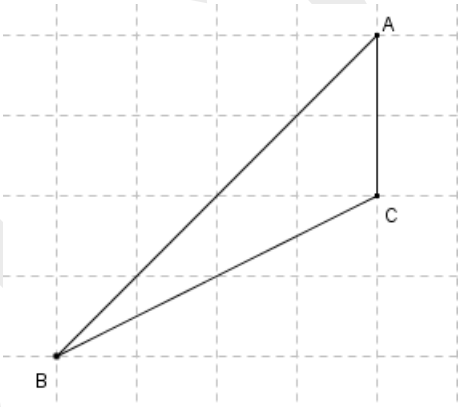
דיון: כמה תיכונים יש למשולש?

תרגול

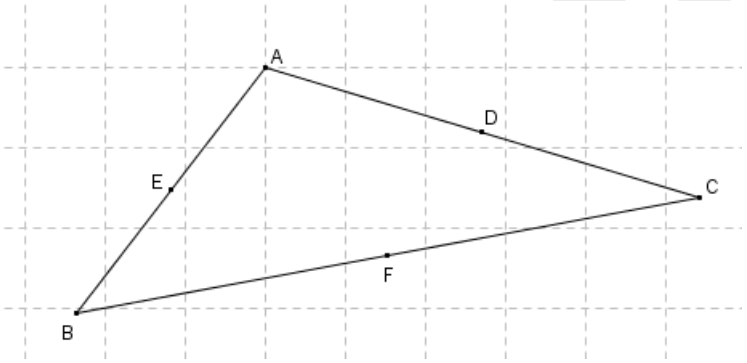
1. היעזרו בסריג כדי לשרטט את התיכון לצלע BC במשולש ABC.



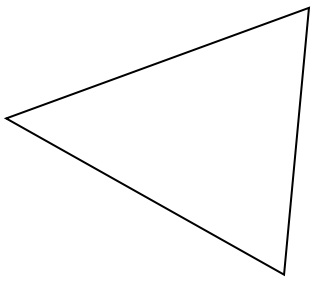
2. היעזרו בסריג כדי לשרטט את התיכונים לצלעות AC ו- AB במשולש ABC.



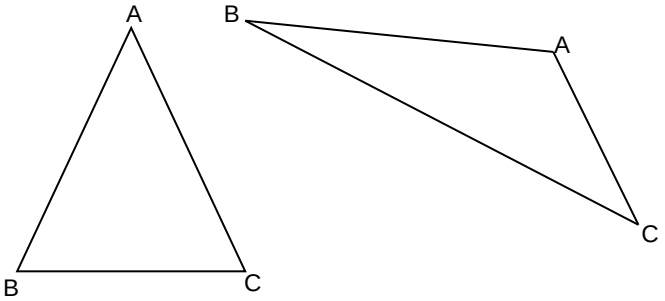
3. הנקודות D, E, F הן אמצעי הצלעות AC, AB, BC בהתאמה.
שרטטו את התיכונים למשולש.



4. מדדו את צלעות המשולש שלפניכם ושרטטו את שלושת התיכונים שלו:



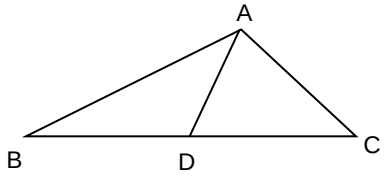
5. שרטטו בעזרת סרגל ומד זווית את הקטעים הבאים במשולשים שלפניכם:



AD גובה לצלע BC.

AP חוצה זווית A.

AM תיכון לצלע BC.



6. במשולש ABC, AD תיכון לצלע BC.

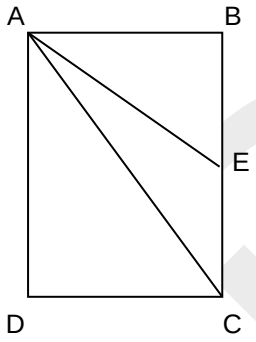
הצלע AB גדולה מהצלע AC ב- 2 ס"מ.

בכמה ס"מ גדול היקף משולש ABD מהיקף משולש ADC? נמקו.

למי משני המשולשים ABD או ADC שטח גדול יותר? נמקו.

מסקנה: תיכון מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח.

7. האם תיכון במשולש מחלק את המשולש לשני משולשים חופפים? נמקו.

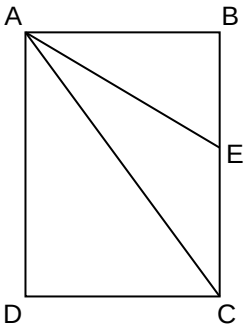


8. בשרטוט שלפניכם מלבן ABCD. AC אלכסון במלבן,

ו-AE תיכון במשולש ABC.

א. מה היחס בין שטחי המשולשים ABE ו-ADC?

ב. איזה חלק משטח המלבן מהווה משולש AEC?



9. בשרטוט שלפניכם מלבן ABCD. AC אלכסון במלבן,

ו-AE חוצה זווית CAB במשולש ABC.

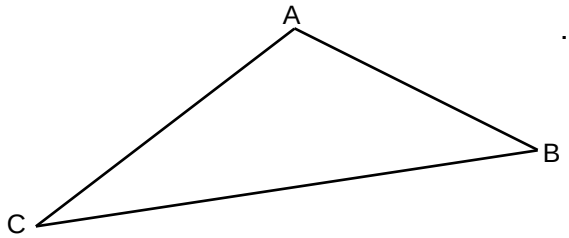
$\sphericalangle EAC = \alpha$

הסבירו בשתי דרכים שונות מדוע $\sphericalangle AEB = 90° - \alpha$.

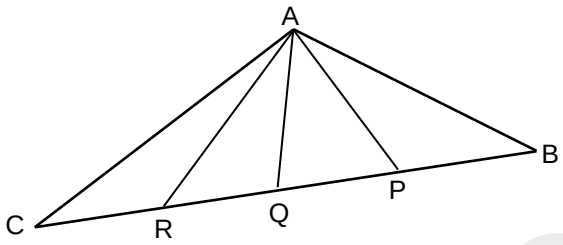
אוריינות

משימה: ירושת קרקע.

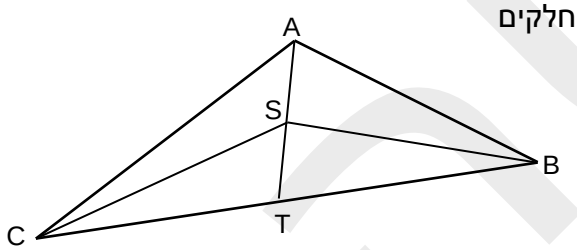
אב הוריש לארבעת בניו חלקת קרקע מישורית שצורתה משולש שקדקודיו הם A, B, C וציווה עליהם לחלקה ביניהם לארבעה שטחים שווים.
כל אחד מהבנים הציע דרך מקורית לחלוקת השטח.



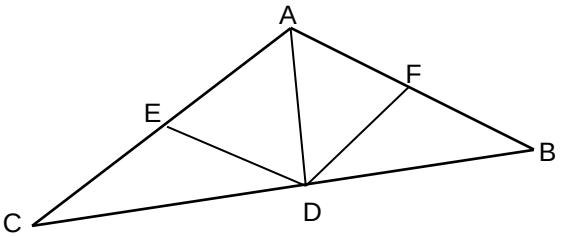
א. ראובן הציע לחלק את הצלע BC לארבעה קטעים שווים. את נקודות החלוקה, P, Q ו-R מחברים עם הקדקוד A כך שנוצרים ארבעה משולשים בתוך המשולש המקורי (ראה שרטוט). קבעו האם הצעתו של ראובן מחלקת את השטח לארבעה חלקים שווים, ונמקו את תשובתכם.



ב. שמעון הציע להעביר מהקדקוד A תיכון AT לצלע BC. מהנקודה S שבאמצע התיכון AT מתח שמעון שני קוים לעבר הקדקודים B, ו-C (ראו שרטוט). קבעו האם הצעתו של שמעון מחלקת את השטח לארבעה חלקים שווים, ונמקו את תשובתכם.

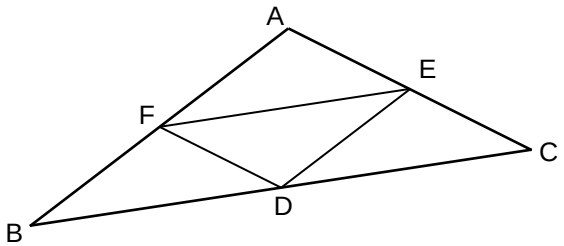


ג. לוי הציע לשרטט גובה AD לצלע BC, ושני תיכונים DE ו-DF לצלעות AC ו-AB. קבעו האם הצעתו של לוי מחלקת את השטח לארבעה חלקים שווים, ונמקו את תשובתכם.

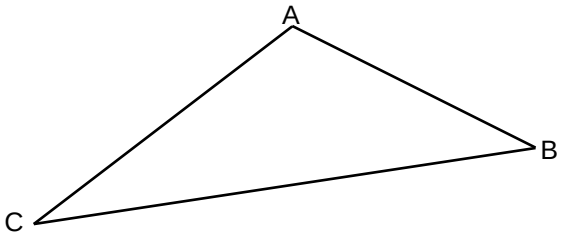


*ד. יהודה הציע לחבר את שלושת אמצעי צלעות המשולש זה עם זה (ראו שרטוט).

קבעו האם הצעתו של יהודה מחלקת את השטח לארבעה חלקים שווים, ונמקו את תשובתכם.



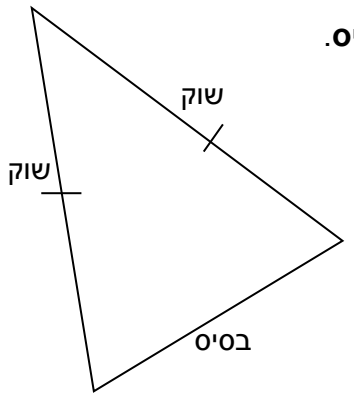
ה. הציעו חלוקה אחרת.



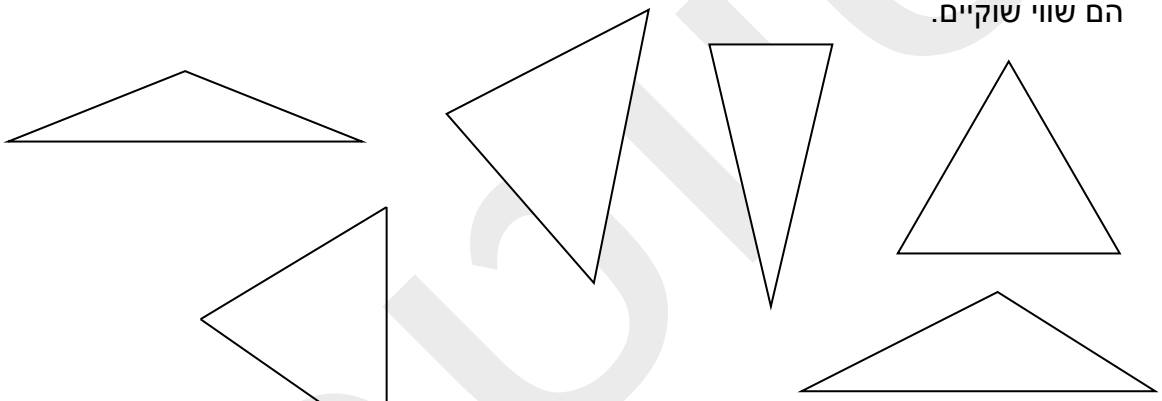
משולש שווה שוקיים

הגדרה: משולש שווה שוקיים – משולש אשר שתיים מצלעותיו שוות זו לזו

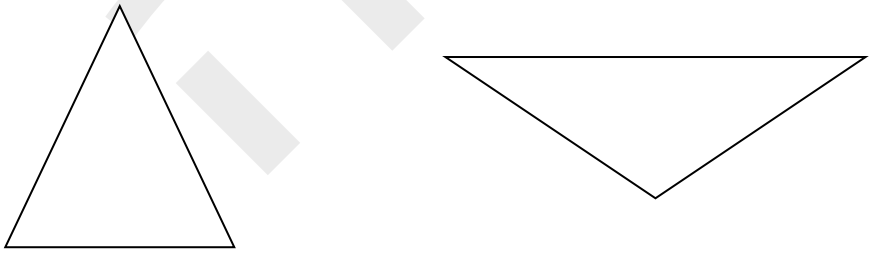
הצלעות השוות נקראות **שוקיים**, הצלע השלישית נקראת **בסיס**.



1. לפניכם שישה משולשים. מדדו בעזרת סרגל את אורכי הצלעות וקבעו אילו מהמשולשים הם שווי שוקיים.



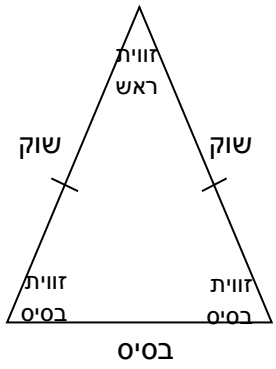
2. לפניכם משולשים שווי שוקיים. מדדו, בעזרת מד זווית, את גודל הזוויות במשולשים הנתונים:



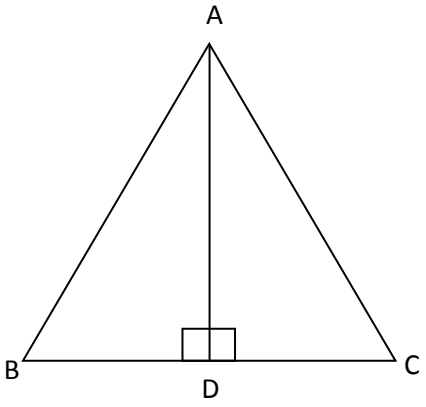
הגדרות: זוויות במשולש שווה שוקיים –

זווית הראש היא הזווית אשר בין השוקיים

זוויות הבסיס הן הזוויות שבין הבסיס לבין כל אחת מהשוקיים



3. לפניכם משולש ABC. הגובה AD לצלע BC, משורטט.



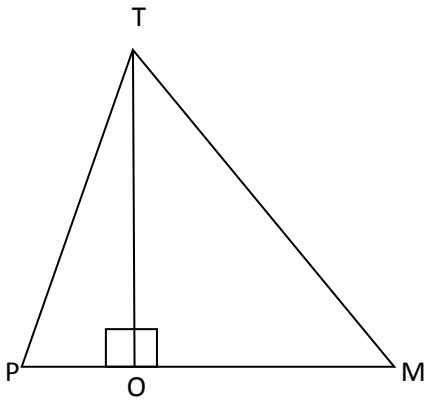
א. בדקו בעזרת סרגל האם המשולש שווה שוקיים

ב. מדדו בעזרת מד זווית את גודל הזוויות BAD, CAD

ג. מדדו בעזרת מד זווית את גודל הזוויות B, C

ד. מדדו בעזרת סרגל את אורך הקטעים BD, CD

4. לפניכם משולש TPM. הגובה TO לצלע PM, משורטט.



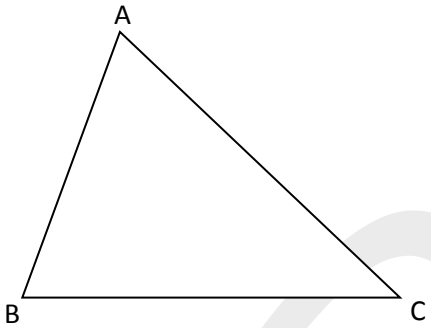
א. בדקו בעזרת סרגל האם המשולש שווה שוקיים

ב. מדדו בעזרת מד זווית את גודל הזוויות PTO, MTO

ג. מדדו בעזרת מד זווית את גודל הזוויות P, M

ד. מדדו בעזרת סרגל את אורך הקטעים MO, PO

5. נתון משולש ABC

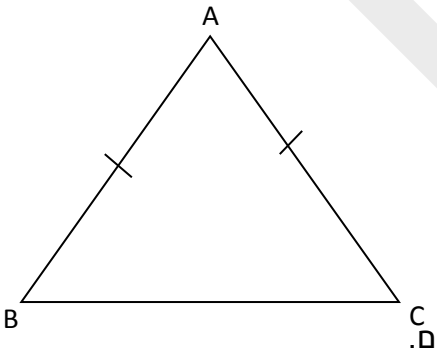


א. סרטטו את AD, חוצה זווית A.

ב. בדקו בעזרת סרגל האם AD הוא גם תיכון לצלע BC

ג. בדקו בעזרת סרגל משולש או מד זווית האם AD הוא גם גובה לצלע BC.

6. נתון משולש שווה שוקיים ABC (AC = AB).



א. סרטטו את AD, חוצה זווית הראש.

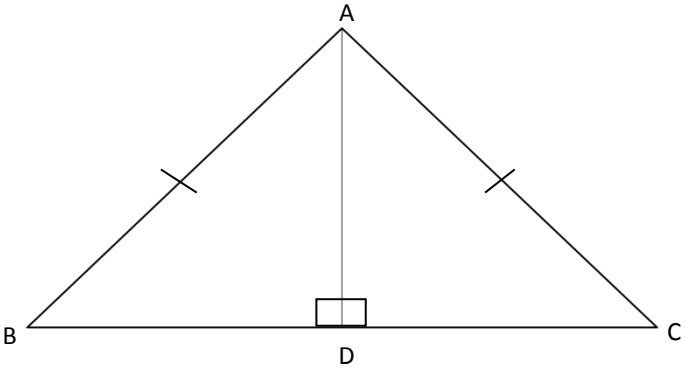
ב. בדקו בעזרת סרגל האם AD הוא גם תיכון לצלע BC

ג. בדקו בעזרת סרגל משולש או מד זווית האם AD הוא גם גובה לצלע BC.

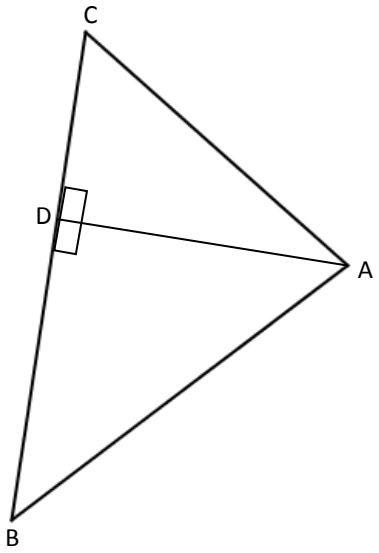
היעזרו במשולש שווה השוקיים שבסוף החוברת, גזרו וקפלו את קו הסימטריה של המשולש. סמנו את כל החלקים השווים.

דיון: מה ההבדל בין המשולשים בסעיפים 5, 6?

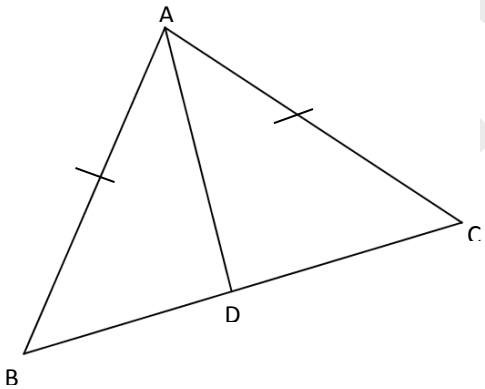
מה ההבדל בין הקטעים במשולשים מסעיפים 5, 6?



7. נתון משולש שווה שוקיים ABC.
AD גובה לבסיס BC.
זוויות B, C שוות זו לזו וגודלן 42°.
מה גודלן של זוויות DAB
ו- DAC?
(היעזרו בחישוב ולא במדידה)

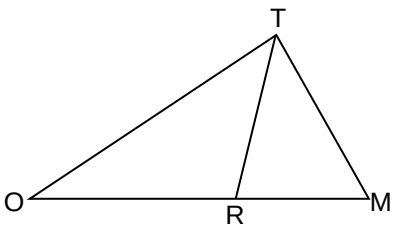


8. נתון משולש ABC.
AD גובה לצלע BC.
$\sphericalangle B = 42°$, $\sphericalangle C = 58°$
מה גודלן של זוויות DAB ו- DAC?
(היעזרו בחישוב ולא במדידה)

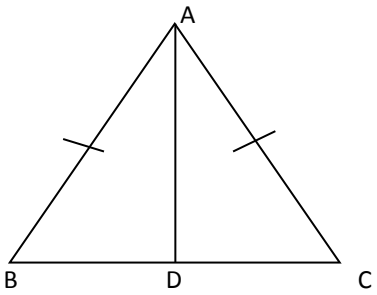


9. במשולש שווה שוקיים שלפניכם AB = AC
AD חוצה זווית A.
נתון: $\sphericalangle A = 80°$
אילו משולשים חופפים זה לזה? ומדוע?
מה חייב להיות גודלה של $\sphericalangle ADC$? נמקו.
מה חייב להיות גודלן של זוויות B ו- C? נמקו.

10. נתון משולש TOM. TR חוצה זווית T. מדדו וקבעו האם TR הוא תיכון לצלע MO.
מדדו וקבעו האם TR הוא גובה לצלע MO.



11. במשולש שווה שוקיים שלפניכם AB = AC ו- AD חוצה זווית A.



$\sphericalangle A = \alpha$

א. אילו משולשים חופפים זה לזה? השלימו את הנימוקים לחפיפה:

AB = AC כי _____

AD = AD כי _____

$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2 = \frac{\alpha}{2}$ כי _____

$\Downarrow$

_____ עפ"י משפט החפיפה _____

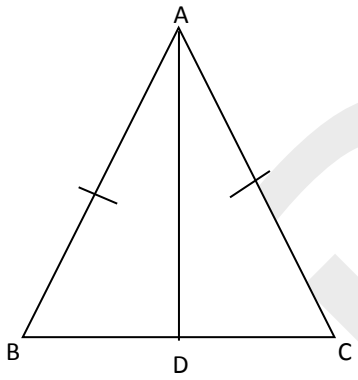
ב. השלימו: $\sphericalangle B =$ _____

ג. השלימו את המשפט: במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס _____

ד. השלימו: $\sphericalangle BDA =$ _____ = _____°, BD = _____

ה. השלימו את המשפט: במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש מתלכד עם _____ ועם ה_____

12. במשולש שווה שוקיים שלפניכם AB = AC ו- AD תיכון לצלע BC.



א. אילו משולשים חופפים זה לזה? השלימו את הנימוקים לחפיפה:

AB = AC כי _____

AD = AD כי _____

BD = DC כי _____

$\Downarrow$

_____ עפ"י משפט החפיפה _____

ב. השלימו:

$\sphericalangle B =$ _____

$\sphericalangle BAD =$ _____

$\sphericalangle BDA =$ _____ = _____°

משפטים שהוכחו:

- במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.

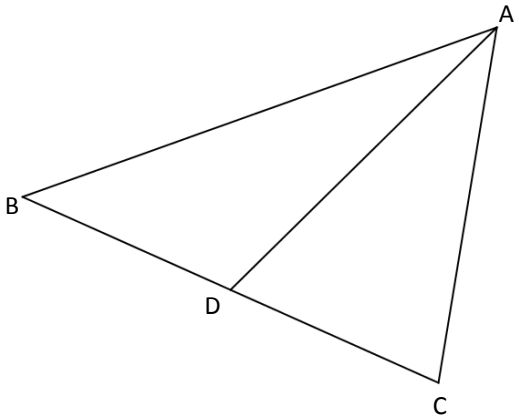
- במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש מתלכד עם הגובה לבסיס ועם התיכון לבסיס.

13. במשולש ABC בקטע AD הוא תיכון לצלע BC.

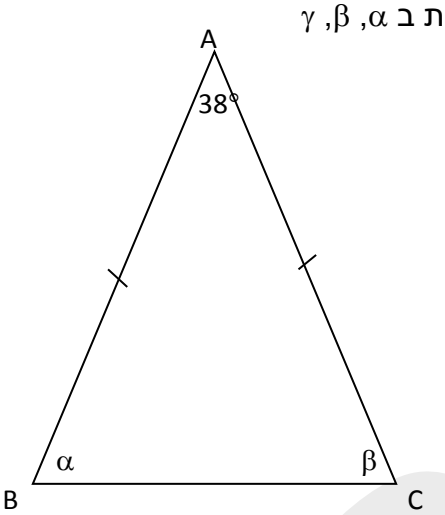
א. האם המשולשים ABD ו- ACD חופפים? נמקו.

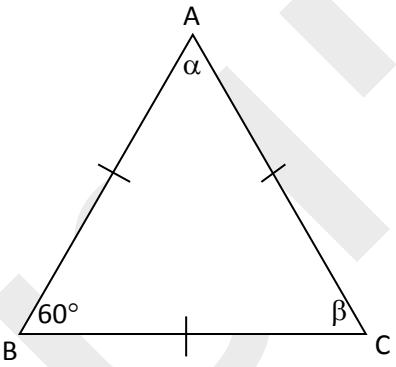
ב. האם המשולשים ABD ו- ACD שווי שטח? נמקו.

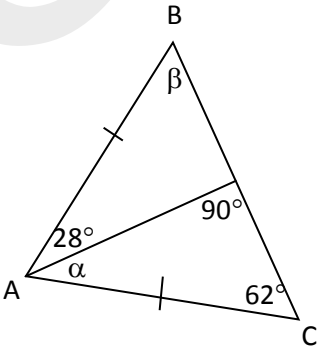
ג. האם המשולשים ABD ו- ACD שווי היקף? נמקו.

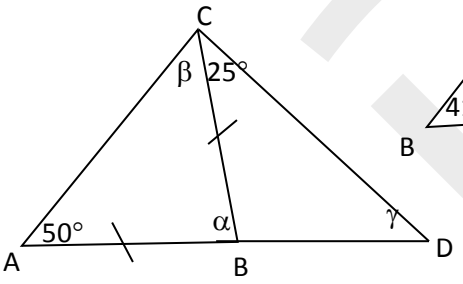


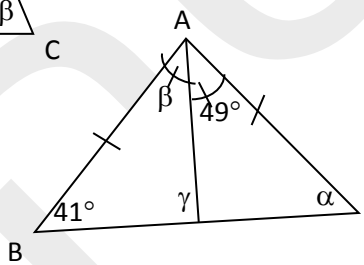
14. לפניכם משולשים שווי שוקיים ABC. הצלעות השוות והזוויות השוות מסומנות. קבעו על סמך הנתונים בסרטוט ובעזרת חישוב, את גודל הזוויות המסומנות ב α, β, γ

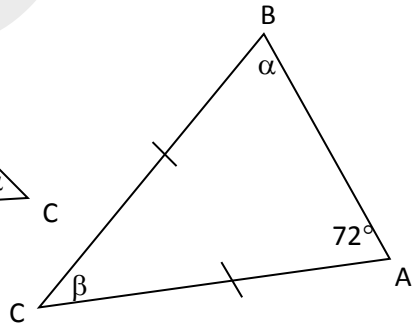


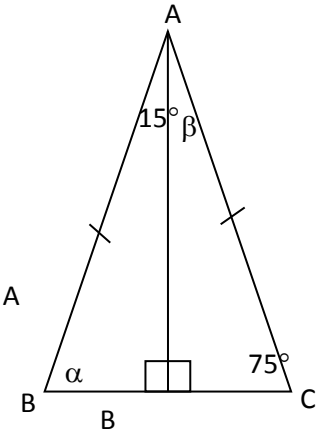




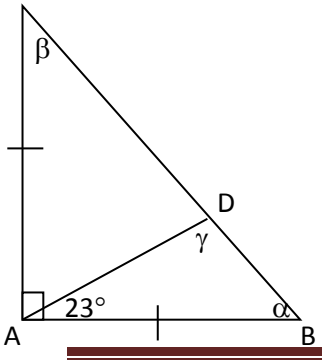


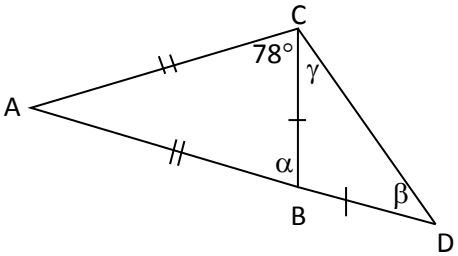






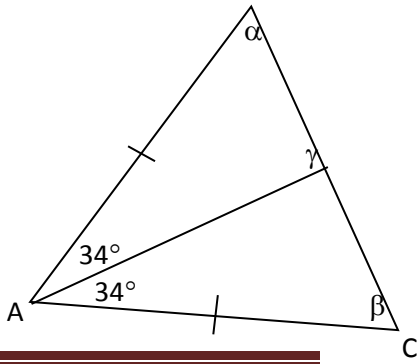
A, B, D על קו ישר C





משולש BCD משולש שווה שוקיים

A, B, D על קו ישר



15. הייתכן שזוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים תהיינה שתיהן חדות? נמקו.

הייתכן שזוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים תהיינה שתיהן ישרות? נמקו.

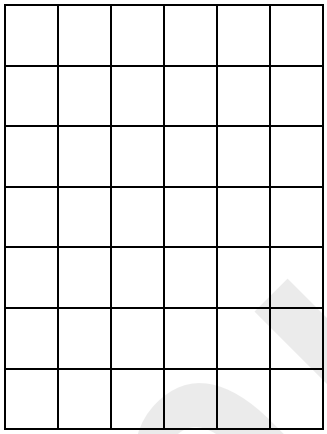
הייתכן שזוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים תהיינה שתיהן קהות? נמקו.

16. איזה משולש מתקבל כאשר זווית הראש במשולש שווה שוקיים היא בת $60°$?

17. איזה משולש מתקבל כאשר זווית בסיס במשולש שווה שוקיים היא בת $45°$?

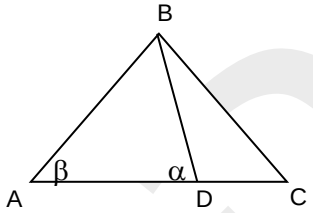
18. האם כל המשולשים שווי השוקיים, ששוקיהם באותו אורך, חופפים זה לזה? נמקו.

19. אורכה של כל צלע בריבועים הקטנים מייצגת 1 ס"מ. שרטטו משולש שווה שוקיים שאורך בסיסו 4 ס"מ וגובהו 5 ס"מ.



20. א. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים. D נקודה על הבסיס AC.

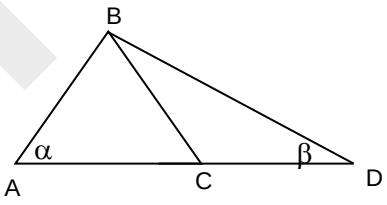
הסבירו מדוע $\alpha > \beta$.



ב. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.

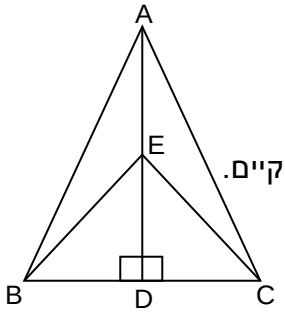
D נקודה על המשך הבסיס AC.

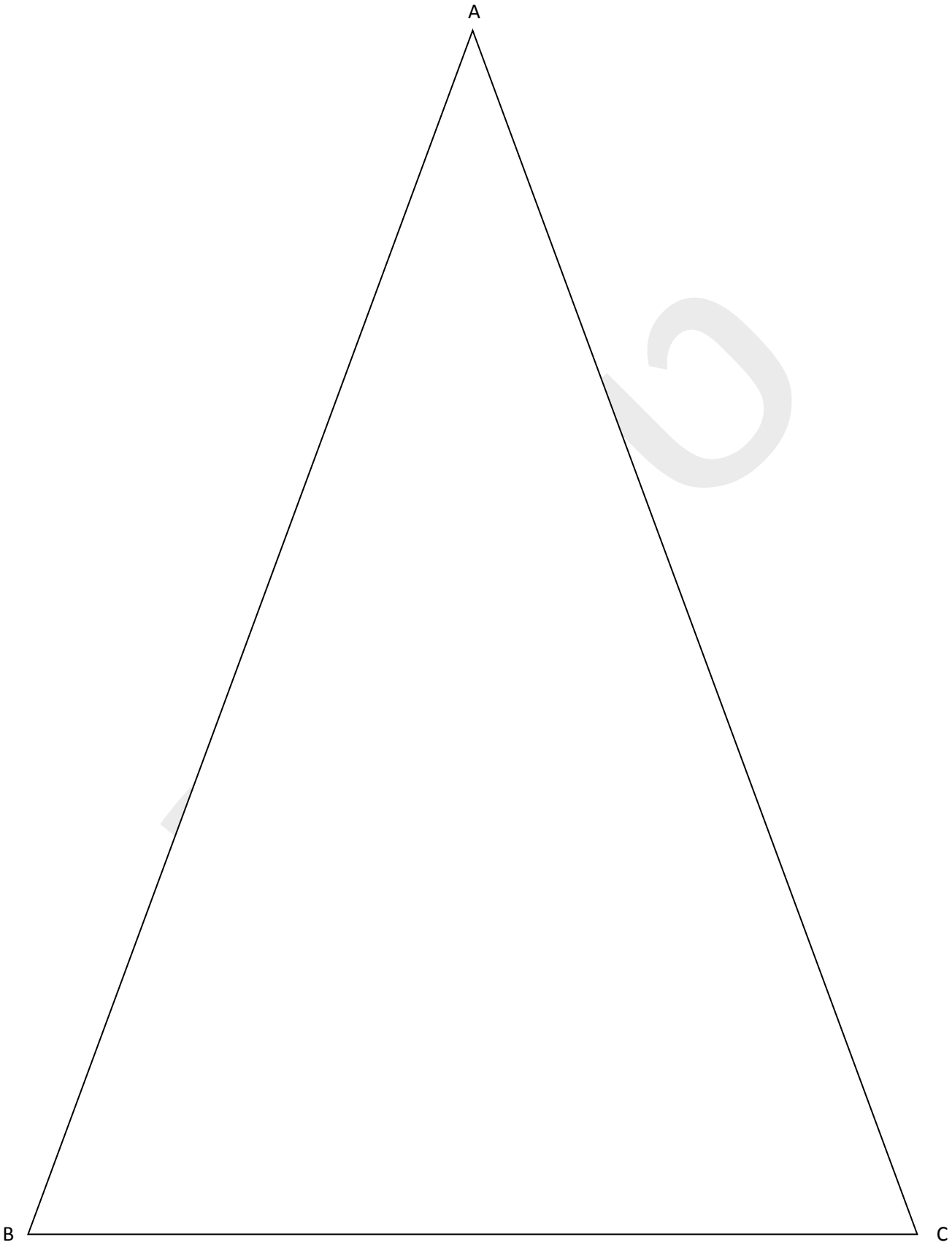
הסבירו מדוע $\alpha > \beta$.



*21. משולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB = AC)$,$AD \perp BC$

היעזרו בחפיפת משולשים לנמק מדוע משולש BEC הוא משולש שווה שוקיים.




A
B
C

לתרגול אפשר להשתמש גם בספרי הלימוד:

ספר ניסוי	מוציא לאור	עמודים
אפשר גם אחרת – כיתה ח' - חלק ב'	טכניון ואוניברסיטה עברית	152 - 108
מתמטיקה משולבת לכיתה ח' מסלול כחול – חלק ב'	מכון וייצמן	297 - 286
מתמטיקה משולבת לכיתה ח' מסלול ירוק – חלק ב'	מכון וייצמן	296 - 284
מתמטיקה לכיתה ח'	משבצת	418 - 414 ,393 - 382
עשר בריבוע – חלק ג'	למדא	148 - 103
מתמטיקה לכיתה ח'	אתי עוזרי ויצחק שלו	556 - 543 ,509 - 487
קפ"ל – כיתה ח' – חלק ב'	האוניברסיטה העברית	93 - 86 ,85 - 82, 169 - 155
שבילים – מתמטיקה לכיתה ח' - חלק 2	מט"ח	142 - 109