

ke - א' 035005 - מבחן ממוקד -**בהתאם לאיקוז קי' 2008****מספר המיקוד של גבי יקואל – הוצאת משבצת****עמודים: 171 – 181 (כולל פתרון מלא)****פרק א': אלגברה ($33\frac{1}{3}$ נקודות)**

ענה על אחת מהשאלות (1) – (2).

$$(1) \quad (א) \quad \text{עבור אילו ערכים של } m \text{ יש למשוואה } \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + x - 6} = m$$

שני שורשים ממשיים שונים?

(ב) עבור אילו ערכים של x , m הוא חיובי?

(2) שני פועלים במפעל מכינים חלקי חילוף מסוג מסוים. הפועל הראשון עובד בקצב קבוע ומכין 84 חלקי חילוף בכל יום עבודה. הפועל השני מכין ביום הראשון 27 חלקי חילוף ובכל יום לאחר מכן מכין 3 חלקי חילוף יותר מאשר ביום הקודם לו. כל אחד מהפועלים הכין את אותו מספר החלקים אך לפועל הראשון (שעבד בקצב קבוע), נדרשו 4 ימים פחות מאשר לפועל השני.

כמה חלקי חילוף הכין כל אחד מהפועלים בסה"כ?

(מצא את שני הפתרונות האפשריים.)

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

פרק ב': הנדסת המישור והסתברות ($66\frac{2}{3}$ נקודות)ענה על שתיים מהשאלות (3) – (6), מהן מותר לענות לכל היותר על אחת מהשאלות(5) – (6) (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).**הנדסת המישור**

(3) הקדקודים A ו-B של המשולש ABC

נמצאים על מעגל. המעגל חותך את צלעות

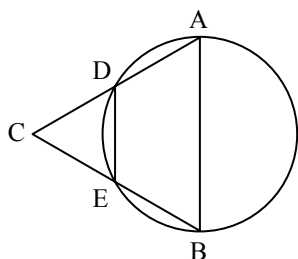
המשולש בנקודות D ו-E (ראה ציור). נתון:

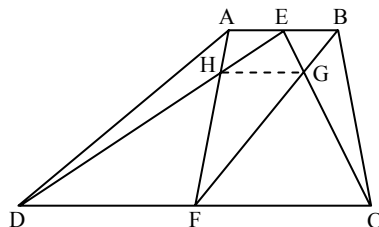
הקשת $\widehat{AB}$ היא בת 180° , $EB = DA$.

(א) הוכח שהמשולש ABC

הוא משולש שווה-שוקיים.

(ב) נתון: משולש DCE הוא משולש שווה-צלעות.

10 ס"מ $BE =$. מצא את רדיוס המעגל.



(4) בטרפז ABCD הנקודות E ו-F

הן אמצעי הבסיסי AB ו-CD

בהתאמה, הקטעים BF ו-CE

נחתכים בנקודה G, והקטעים AF

ו-DE נחתכים בנקודה H (ראה ציור).

נתון: $AB = 10$ ס"מ, $DC = 40$ ס"מ.

(א) חשב את היחס $\frac{EH}{HD}$

(ב) הוכח כי הקטע HG מקביל לבסיסי הטרפז.

(ג) חשב את אורך הקטע HG.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

שים לב! מותר לענות לכל היותר על אחת מהשאלות (5) – (6).

הסתברות

(5) "רובקופ" פוגש בדרך למקום עבודתו מספר רב של רמזורים. ידוע שאם הוא פוגש רמזור ירוק, ההסתברות שהרמזור הבא יהיה ירוק היא 0.8, ואם הוא פוגש רמזור אדום, ההסתברות שהרמזור הבא יהיה אף הוא אדום היא 0.4. (הנחה: רמזור יכול להיות ירוק או אדום בלבד). ביום מסוים, הרמזור הראשון שפגש "רובקופ" היה רמזור ירוק.

(א) מהי ההסתברות שהרמזור הרביעי בדרך יהיה ירוק?

(ב) מהי ההסתברות שמבין 4 הרמזורים הראשונים:

2 יהיו ירוקים ו-2 יהיו אדומים?

(ג) אם ידוע שהרמזור הרביעי היה רמזור אדום,

מהי ההסתברות שהרמזור השני היה ירוק?

חשיבה הסתברותית בחיי יומיום

(6) בטיסות של חברת תעופה מסוימת נהוג לחלק ירחונים לעיון. בסקר שערכה החברה נמצא כי 50% מהפרופסורים הטסים במטוסי החברה בוחרים בירחון מדעי, ורק 5% מאנשי העסקים הטסים במטוסים שלה בוחרים בירחון כזה. נסמן:

A – קבוצת אנשי העסקים הטסים במטוסי החברה.

B – קבוצת הפרופסורים הטסים במטוסי החברה.

M – קבוצת הבוחרים בירחון מדעי.

המשך בעמוד הבא <<<

אדם הנמצא בטיסה מסוימת של החברה קורא בירחון מדעי.

(א) אחד הנוסעים בטיסה זו טען כי הסיכוי שאדם זה פרופסור גדול מהסיכוי שהוא איש עסקים. האם טענתו נכונה? נמק.

(ב) (i) מספר אנשי העסקים הטסים במטוסי החברה גדול פי 12 ממספר הפרופסורים הטסים במטוסים שלה. חשב את היחס בין הסיכוי שאדם זה הקורא בירחון מדעי הוא פרופסור ובין הסיכוי שהוא איש עסקים.

(ii) מה צריך להיות היחס בין מספר הפרופסורים הטסים במטוסי החברה למספר אנשי העסקים הטסים במטוסים שלה, כדי שהסיכוי שאדם זה הוא פרופסור יהיה שווה לסיכוי שהוא איש עסקים? פרט את חישוביך.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

פתרונות מלאים

(1) פתרון מלא:

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + x - 6} = m \quad \text{(א) נתונה המשוואה:}$$

$$x^2 + x - 6 \neq 0 \quad \text{נרשום תחילה את קבוצת ההצבה:}$$

$$(x + 3)(x - 2) \neq 0 \quad \text{נפרק בעזרת פירוק הטרינום:}$$

$$x \neq -3, x \neq 2 \quad \text{ונקבל את קבוצת ההצבה של המשוואה:}$$

$$x^2 + 4x + 4 = m(x^2 + x - 6) \quad \text{כעת נפתור את המשוואה:}$$

$$x^2 + 4x + 4 = mx^2 + mx - 6m \quad \text{נפתח סוגריים:}$$

נכנס את כל האיברים אל אגף שמאל של המשוואה

$$(1 - m)x^2 + (4 - m)x + 4 + 6m = 0 \quad \text{נפשט ונקבל:}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{כדי שלמשוואה ריבועית מהצורה:}$$

יהיו שני שורשים ממשים שונים, צריכים להתקיים

$$\Delta > 0 \quad (ii), a \neq 0 \quad (i) \quad \text{התנאים:}$$

$$1 - m \neq 0 \Rightarrow m \neq 1 \quad \text{לגבי תנאי (i):}$$

$$\Delta = (4 - m)^2 - 4(1 - m)(4 + 6m) > 0 \quad \text{לגבי תנאי (ii):}$$

$$16 - 8m + m^2 - 4(4 + 2m - 6m^2) > 0 \quad \text{נפתח סוגריים:}$$

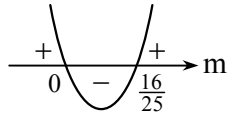
המשך בעמוד הבא <<<

נפתח שוב סוגריים ונכנס איברים :

נמצא את שורשי המשוואה הריבועית המתאימה :

$$m(25m - 16) = 0$$

$$m_1 = 0, m_2 = \frac{16}{25}$$



אי-השוויון $25m^2 - 16m > 0$ מתקיים כאשר : $m < 0$ או $m > \frac{16}{25}$.

כעת נחתוך בין התנאים שהתקבלו

מהאילוצים (i) ו-(ii)

ונקבל : $m < 0$ או

$\frac{16}{25} < m < 1$ או $m > 1$.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

מסקנה : למשוואה יש שני שורשים ממשיים

שונים כאשר $m < 0$ או $\frac{16}{25} < m < 1$ או $m > 1$.

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + x - 6} > 0$$

(ב) יש לפתור את אי-השוויון :

קבוצת ההצבה, כפי שנמצאה בסעיף (א) היא :

$$\frac{(x+2)^2}{(x+3)(x-2)} > 0$$

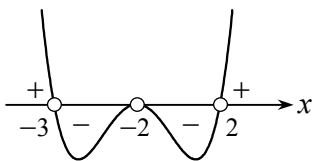
נפרק לגורמים את המונה ואת המכנה, ונקבל :

המאפס של המונה הוא $x = -2$ והמאפסים של המכנה

הם : $x_2 = 2$, $x_3 = -3$. נפתור בשיטת "הנחש" :

ערך הביטוי	נקודת בחירה	תחום
$\frac{16 - 16 + 4}{16 - 4 - 6} = \frac{+}{+} > 0$	$x = -4$	$x < -3$
$\frac{6.25 - 10 + 4}{6.25 - 2.5 - 6} = \frac{+}{-} < 0$	$x = -2.5$	$-3 < x < -2$
$\frac{0 + 0 + 4}{0 + 0 - 6} = \frac{+}{-} < 0$	$x = 0$	$-2 < x < 2$
$\frac{16 + 16 + 4}{16 + 4 - 6} = \frac{+}{+} > 0$	$x = 4$	$x > 2$

כעת נוכל לצייר את "הנחש" :



מסקנה : $m > 0$ כאשר : $x < -3$ או $x > 2$.

(2) פתרון מלא:

- חלקי החילוף שמייצר הפועל הראשון מהווים סדרה חשבונית שהפרשה 0 .
 חלקי החילוף שמייצר הפועל השני מהווים סדרה חשבונית **עולה** שהפרשה 3 .
 נתאר את הנתונים בעזרת טבלה.

פועל ב'	פועל א'	
$b_1 = 27$	$a_1 = 84$	ביום הראשון
$d_b = 3$	$d_a = 0$	הפרש הסדרה
n	$n - 4$	מספר הימים שעבד
T_n	S_{n-4}	סה"כ החלקים שייצר

נחשב את סך-כל החלקים שייצר כל פועל.

$$S_{n-4} = \frac{n-4}{2} \cdot (2 \cdot 84 + 0) = 84(n-4)$$

$$T_n = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot 27 + (n-1) \cdot 3] = \frac{n}{2}(3n+51)$$

מספר החלקים שייצרו פועל א' ופועל ב' שווים: $S_{n-4} = T_n$

$$84(n-4) = \frac{n}{2}(3n+51) \quad / \cdot 2 \quad \text{נקבל את המשוואה:}$$

$$168n - 672 = 3n^2 + 51n$$

$$3n^2 - 117n + 672 = 0 \quad \text{נכנס איברים דומים ונקבל את המשוואה הריבועית:}$$

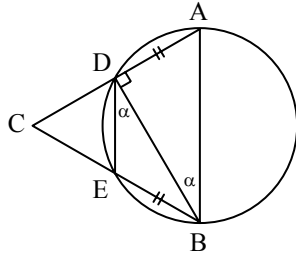
$$n^2 - 39n + 224 = 0 \quad \text{נחלק את שני אגפי המשוואה ב-3 ונקבל:}$$

$$n_{1,2} = \frac{39 \pm \sqrt{625}}{2} = \frac{39 \pm 25}{2} \quad \text{נפתור את המשוואה:}$$

מסקנה: $n_1 = 7$ ועבורו כמות החלקים שיוצרה היא $T_7 = 252$ חלקים,

או: $n_2 = 32$ ועבורו כמות החלקים שיוצרה היא $T_{32} = 2,352$ חלקים.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(3) פתיח/נלח:

נרשום את הנתונים.

(1) $\widehat{AB} = 180^\circ$, (2) $EB = DA$

נסמן נתונים ומסקנות על-גבי השרטוט.

נעביר את המיתר DB .

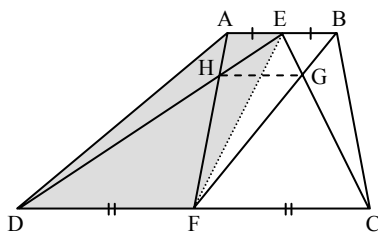
(א) צ"ל כי: $AC = BC$

טענה	נימוק
(3) $\angle EDB = \angle ABD$	במעגל, זוויות היקפיות הנשענות על מיתרים שווים (2) מאותו צד, שווים (סימנו α).
(4) $ED \parallel AB$	מצאנו זוג זוויות מתחלפות שוות (3) בין שני הישרים.
(5) ABED הוא טרפז שוו"ש.	במרובע ABED יש זוג צלעות מקבילות (4) וזוג אחר של צלעות שוות ולא מקבילות (2).
(6) $\angle DAB = \angle ABE$	בטרפז שוו"ש (5) הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
(7) $AC = BC$	משולש שבו יש זוג זוויות (6) שוות הוא משולש שווה-שוקיים. מש"ל.

(ב) (8) נתון: $DC = CE = ED$ (9) נתון: 10 ס"מ $BE = AD$, על-סמך (2).

צ"ל את גודלו של רדיוס המעגל r .

טענה	נימוק
(10) $\angle CDE = 60^\circ$	זווית במשולש שווה צלעות (8).
(11) $\angle DAB = \angle CDE = 60^\circ$	זוויות מתאימות בין מקבילים (4) , (10).
(12) $\angle ADB = 90^\circ$	זווית היקפית שווה למחצית הקשת עליה היא נשענת, ובמקרה זה הזווית נשענת על קשת בת 180° (1).
(13) $AB = 2r$ קוטר במעגל,	במעגל, זווית היקפית בת 90° (12) נשענת על קוטר.
(14) $\angle ABD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$	סכום זוויות במשולש ישר-זווית ADB (11) , (12).
(15) $AB = 2 \cdot AD$	במשולש ישר-זווית ADB (12), הניצב מול זווית בת 30° (14) שווה למחצית היתר.
(16) $AB = 2r = 20$ ס"מ	על-סמך סעיפים (9) , (15).
(17) $r = 10$ ס"מ	מש"ל.



(4) פתרון נ/א:

נרשום את הנתונים.

$$AE = BE \quad (2) \quad , \quad AB \parallel CD \quad (1)$$

$$AB = 10 \text{ ס"מ} \quad (4) \quad , \quad DF = CF \quad (3)$$

$$DC = 40 \text{ ס"מ} \quad (5)$$

נסמן נתונים ומסקנות על-גבי השרטוט.

$$(א) \quad \frac{EH}{HD} : \text{צ"ל את}$$

טענה	נימוק
(6) $AEFD$ טרפז	יש בו זוג אחד בלבד של צלעות מקבילות (1).
(7) $\frac{AE}{DF} = \frac{HE}{HD}$	לפי משפט תאלס המורחב.
(8) $AE = BE = \frac{1}{2} AB = 5 \text{ ס"מ}$	על-סמך סעיפים (2), (4).
(9) $DF = CF = \frac{1}{2} CD = 20 \text{ ס"מ}$	על-סמך סעיפים (3), (5).
(10) $\frac{HE}{HD} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$	על-סמך סעיפים: (7), (8), (9). מש"ל.

(ב) צ"ל כי: $HG \parallel AB \parallel CD$

טענה	נימוק
(11) $EBCF$ טרפז	יש בו זוג אחד בלבד של צלעות מקבילות (1).
(12) $\frac{EG}{GC} = \frac{EB}{FC}$	לפי משפט תאלס המורחב.
(13) $\frac{EG}{GC} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$	על-סמך סעיפים: (8), (9), (12).
(14) $\frac{EG}{GC} = \frac{HE}{HD}$	כלל המעבר: (10), (13).
(15) $HG \parallel CD$	לפי המשפט ההפוך למשפט תאלס.
(16) $HG \parallel AB$	על-סמך סעיפים: (1), (15). מש"ל.

© גבי יקואל

הוצאת משבצת

המשך בעמוד הבא <<<

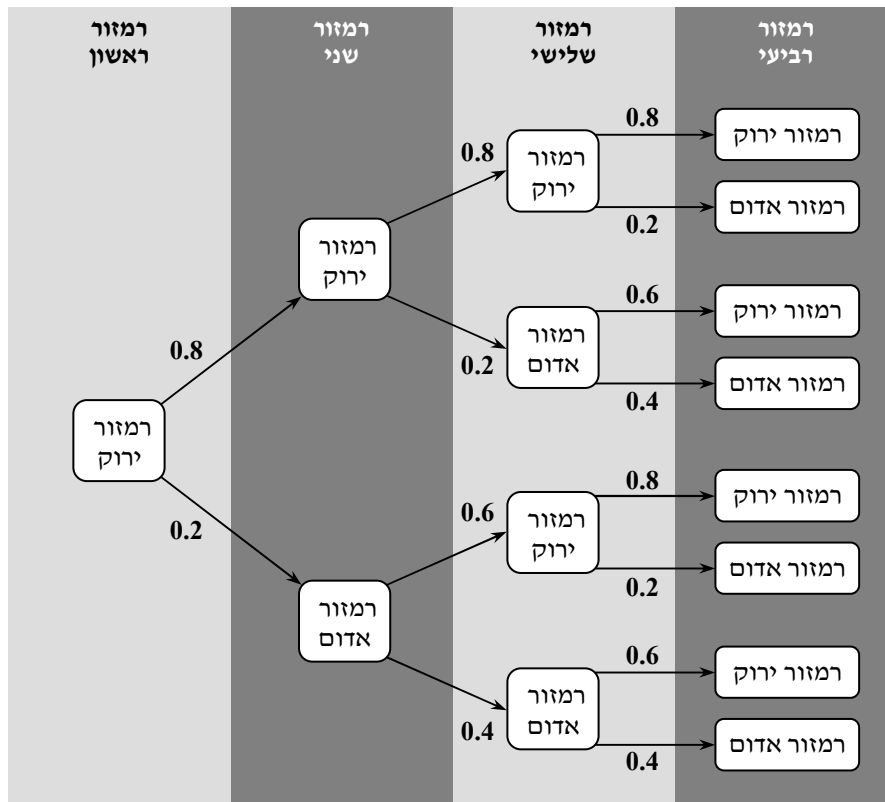
(ג) צ"ל את: $HG = ?$

טענה	נימוק
$\frac{HG}{DC} = \frac{EH}{ED}$ (17)	לפי משפט תאלס המורחב במשולש EDC.
$HD = 4x$, $HE = x$ (18)	הצבה, על-סמך סעיף: (10).
$ED = x + 4x = 5x$ (19)	חיבור קטעים (18).
$\frac{HG}{DC} = \frac{EH}{ED} = \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}$ (20)	על-סמך סעיפים: (17), (18), (19).
$5 \cdot HG = DC = 40$ ס"מ (21)	על-סמך סעיפים: (5), (20).
$HG = 8$ ס"מ (22)	מש"ל.

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(5) פתרון נ/א:

נשרטט דיאגרמת עץ מתאימה:



<<< המשך בעמוד הבא

נרשום בעזרת הסתברויות מותנות את נתוני הבעיה שהוצגו ב"עץ":

$$P(\text{הרמזור הקודם ירוק} / \text{הרמזור הבא ירוק}) = 0.8$$

$$P(\text{הרמזור הקודם ירוק} / \text{הרמזור הבא אדום}) = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$P(\text{הרמזור הקודם אדום} / \text{הרמזור הבא אדום}) = 0.4$$

$$P(\text{הרמזור הקודם אדום} / \text{הרמזור הבא ירוק}) = 1 - 0.4 = 0.6$$

(א) ישנם ארבעה מסלולים לאורך ענפי העץ שמובילים לתוצאה הסופית:

"רמזור רביעי ירוק":

1. (ירוק ← ירוק ← ירוק ← ירוק) 2. (ירוק ← ירוק ← אדום ← ירוק)

3. (ירוק ← אדום ← ירוק ← ירוק) 4. (ירוק ← אדום ← אדום ← ירוק)

ההסתברות של כל אחד מהמסלולים שווה למכפלת ההסתברויות הרשומות לאורכו. ההסתברות של המאורע "רמזור רביעי ירוק" תהיה חיבור של ארבע ההסתברויות שנקבל, שכן המאורע "רמזור רביעי ירוק" הוא איחוד של ארבע המאורעות (המסלולים) שאליהם התייחסנו לעיל, וארבעת המסלולים זרים. נקבל:

$$P(\text{רמזור רביעי ירוק}) = 0.8^3 + 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 0.752$$

(ב) ישנם שלושה מסלולים לאורך ענפי "העץ" שמובילים לתוצאה:

"שני רמזורים ירוקים ושני רמזורים אדומים", והם:

1. (ירוק ← ירוק ← אדום ← אדום) 2. (ירוק ← אדום ← ירוק ← אדום)

3. (ירוק ← אדום ← אדום ← ירוק)

בדומה לפתרון סעיף (א) נחשב את ההסתברות של כל מסלול לחוד על-ידי חישוב מכפלת ההסתברויות הרשומות לאורכו ונחבר את כל השלוש, כי שלושת המסלולים זרים. נקבל:

$$P(\text{שני רמזורים ירוקים ושני רמזורים אדומים}) = 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 0.136$$

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

המשך בעמוד הבא <<<

(ג) ישנם שני מסלולים לאורך ענפי "העץ" שמובילים לתוצאה:
 "רמזור שני ירוק ורמזור רביעי אדום".

1. (ירוק ← ירוק ← ירוק ← אדום) 2. (ירוק ← ירוק ← אדום ← אדום)
 אנחנו צריכים לחשב את ההסתברות שהרמזור השני היה ירוק אם ידוע
 שהרמזור הרביעי היה אדום. נחשב לפי הגדרת ההסתברות המותנית:

$$P(\text{רמזור רביעי אדום} / \text{רמזור שני ירוק}) = \frac{P(\text{רמזור רביעי אדום} \cap \text{רמזור שני ירוק})}{P(\text{רמזור רביעי אדום})} = \frac{0.8^2 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.4}{1 - P(\text{רמזור רביעי ירוק})} = \frac{0.192}{1 - 0.752} = \frac{24}{31} \approx 0.774$$

הערה: את ההסתברות שהרמזור הרביעי יהיה ירוק חישבנו בסעיף (א).

(6) פתרון חלק:

נסמן ב-C את קבוצת האנשים שאינם פרופסורים ואינם אנשי עסקים.

כמו כן נסמן: $N(A) = x$, $N(B) = y$, $N(C \cap M) = z$,

ו- $N(C \cap \bar{M}) = w$. נערוך טבלת שכיחויות דו-מימדית המתאימה

לשאלה ונשבץ בה את הנתונים, על-פי הסימונים שהגדרנו.

סה"כ	A	B	C	סה"כ
M	0.05x	0.5y	z	0.05x + 0.5y + z
$\bar{M}$	x - 0.05x = 0.95x	y - 0.5y = 0.5y	w	0.95x + 0.5y + w
סה"כ	x	y	z + w	x + y + z + w

(א) נחשב פרופורציות מתאימות:

$$P(B / M) = \frac{N(B \cap M)}{N(M)} = \frac{0.5y}{0.05x + 0.5y + z}$$

$$P(A / M) = \frac{N(A \cap M)}{N(M)} = \frac{0.05x}{0.05x + 0.5y + z}$$

© גבי יקואל

הוצאת משבצת

המשך בעמוד הבא <<<

טענתו של האדם תהיה נכונה **אם ורק אם** : $0.05x < 0.5y$, כלומר **אם ורק אם** : $x < 10y$. מכיוון שאי-השוויון האחרון **אינו חייב** להתקיים, הרי שטענתו של האדם **איננה בהכרח** נכונה.

(ב) (i) נתון : $x = 12y$ נחשב את היחס הנדרש :

$$\frac{P(B / M)}{P(A / M)} = \frac{\frac{0.5y}{0.05x + 0.5y + z}}{\frac{0.05x}{0.05x + 0.5y + z}} = \frac{0.5y}{0.05x} = \frac{10y}{x} = \frac{10y}{12y} = \frac{5}{6}$$

(ii) כדי שהסיכוי שאדם זה הוא פרופסור יהיה שווה לסיכוי שאדם זה

הוא איש עסקים, נדרש שיתקיים : $P(B / M) = P(A / M)$.

משמעות השוויון היא שמבין האנשים שקוראים ירחון מדעי, מספר

הפרופסורים שווה למספר אנשי העסקים. שוויון זה מתקיים כאשר :

$0.05x = 0.5y$ כלומר : $x = 10y$. כלומר היחס הנדרש לכך הוא :

$$\frac{N(B)}{N(A)} = \frac{y}{x} = \frac{1}{10}$$

© גבי יקואל

הוצאת משבצת

המבחן מופיע גם באתר האינטרנט של משבצת

כתובת האתר : www.mishbetzet.co.il