

- kallon ג' 035003 - מבחן ממוקד -

בהתאם לאיקוז קיץ 2008

מספר המיקוד של גבי יקואל – הוצאת משבצת

עמודים: 109 – 110, 132 – 135 (כולל פתרון מלא)

פתור שלוש מהשאלות 1-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}\%$).

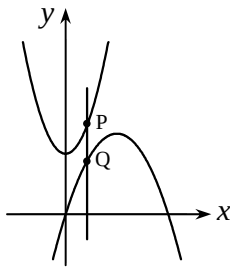
אלגברה

- (1) במשולש ישר-זווית אורך היתר הוא 17 ס"מ.
ההפרש בין שטחי הריבועים, הבנויים על הניצבים, הוא 161 סמ"ר.
(א) חשב את אורכי הניצבים ואת שטח המשולש.
(ב) חשב את אורך הגובה ליתר.
- (2) במלבן ABCD נתון: $A(5, -2)$, $B(-3, 2)$, קדקוד C נמצא על ציר ה-y.

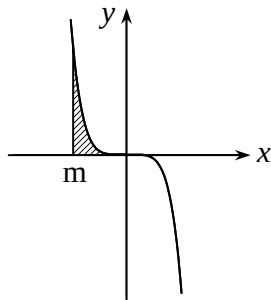
© גבי יקואל
הוצאת משבצת

- (א) מצא את השיפוע של הצלע BC.
(ב) (i) מצא את שיעורי הקדקוד C.
(ii) מצא את שיעורי הקדקוד D.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי



- (3) נתונים הגרפים של שתי הפרבולות:
 $y = -\frac{1}{6}x^2 + 4x$, $y = \frac{1}{3}x^2 + 18$
קו המקביל לציר ה-y חותך את שתי הפרבולות בנקודות P ו-Q (ראה ציור).
מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה, מצא את האורך המינימלי של הקטע PQ.



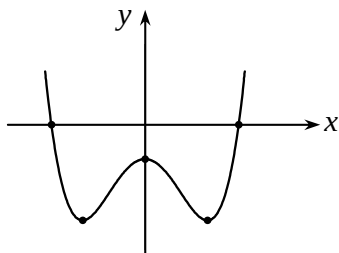
- (4) נתונה הפונקציה: $y = -x^5$ (ראה ציור).
(א) הבע באמצעות m את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה, על-ידי הישר $x = m$ ועל-ידי ציר ה-x (השטח המקווקו בציור).
(ב) נתון כי השטח המקווקו שווה ל- $-m^5$. מצא את m ($m < 0$).

- (5) הפונקציה $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ מוגדרת לכל x .
- (א) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- (ב) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- (ג) הראה כי $f(3) = f(-3) = 0$.
- (ד) היעזר בסעיפים (א) - (ג) ותאר סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות

פתרון מלא *le bachin* מופיע החל מעמוד 132.

- (1) (א) אורכי הניצבים: 15 ס"מ ו- 8 ס"מ. שטח המשולש: 60 סמ"ר.
- (ב) 7.06 ס"מ $\approx 7\frac{1}{17}$ ס"מ.
- (2) (א) $m_{BC} = 2$
- (ב) (i) $C(0,8)$ (ii) $D(8,4)$
- (3) $PQ_{\min} = 10$
- (4) (א) $S = \frac{1}{6}m^6$ (ב) $m = -6$
- (5) (א) $\min(2, -25)$, $\min(-2, -25)$, $\max(0, -9)$
- (ב) תחומי עלייה: $-2 < x < 0$, $x > 2$.
- תחומי ירידה: $x < -2$, $0 < x < 2$.
- (ד) ראה סקיצה משמאל:



© גבי יקואל
הוצאת משבצת

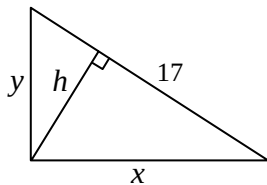
המבחן מופיע גם באתר האינטרנט של משבצת
כתובת האתר : www.mishbetzet.co.il

© גבי יקואל
 הוצאת משבצת

* * * * *

פתרונות מלאים

אלגברה



$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 17^2 \\ x^2 - y^2 &= 161 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(א) לפי משפט פיתגורס:} \\ \text{לפי הנתון:} \end{array}$$

$$2x^2 = 450 \quad \text{נחבר את שתי המשוואות:}$$

$$x^2 = 225 \Rightarrow x = 15$$

$$15^2 + y^2 = 17^2 \quad \text{נציב את הערך שהתקבל במשוואה הראשונה:}$$

$$y^2 = 17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64 \Rightarrow y = 8 \quad \text{ונקבל:}$$

$$S_{\Delta} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{15 \cdot 8}{2} = 60 \text{ סמ"ר} \quad \text{שטח המשולש:}$$

המשך הפתרון בעמוד הבא <<<

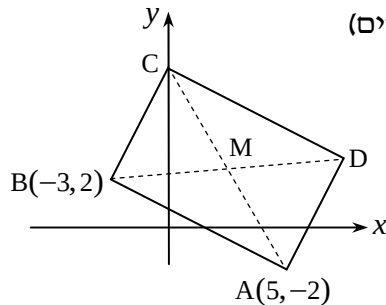
© גבי יקואל
הוצאת משבצת

(ב) שטח המשולש: $S_{\Delta} = \frac{h \cdot 17}{2}$

מסעיף (א) ידוע כי: $S_{\Delta} = 60$. מכאן מתקבל:

$$\frac{h \cdot 17}{2} = 60 \Rightarrow 17h = 120 \Rightarrow h = \frac{120}{17} = 7\frac{1}{17} \text{ ס"מ}$$

(2) (א) בשאלות בגיאומטריה אנליטית מומלץ להוסיף שרטוט שימחיש את המצב



(השרטוט לא חייב להיות במערכת צירים)

ולרשום עליו את נתוני השאלה.

יש רק לשים לב כי שיעורי

הקודקודים חייבים להיות בסבב

(עם או נגד כיוון השעון).

מכיוון שקודקוד C על ציר ה-y,

הרי ששיעור ה-x שלו הוא אפס.

נמצא את שיפוע AB: $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-2)}{-3 - 5} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$

מכיוון ש- $AB \perp BC$ הרי ששיפוע BC הוא: $m_{BC} = 2$

(מכפלת השיפועים של ישרים מאונכים שווה ל- -1).

(ב) (i) נמצא את משוואת הצלע BC על-פי נקודה ושיפוע:

נציב את הנתונים: $B(-3, 2)$ ו- $m_{BC} = 2$ במשוואת הישר:

$$y - 2 = 2(x + 3) \Rightarrow y = 2x + 8$$

למציאת שיעור ה-y של נקודה C נציב: $x = 0$ במשוואת הישר

BC ונקבל: $y = 8$.

לפיכך, הנקודה C היא: $(0, 8)$.

(ii) במלבן אלכסונים חוצים זה את זה (ושווים זה לזה) על כן ניתן

למצוא את נקודת מפגש האלכסונים, הנקודה M (ראה ציור),

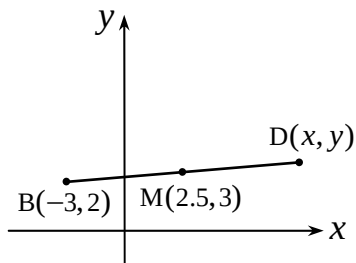
ואחר כך את הנקודה D.

את M נמצא ע"י מציאת נקודת אמצע הקטע AC:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{5+0}{2} = 2.5 \\ y_M &= \frac{-2+8}{2} = 3 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad M(2.5, 3) \quad \Leftrightarrow \quad C(0, 8), A(5, -2)$$

המשך הפתרון בעמוד הבא <<<

כעת נותר למצוא את שיעורי הנקודה D, כאשר M היא גם נקודת אמצע האלכסון BD.



נציב את שיעורי ה- x ונקבל:

$$2.5 = \frac{x + (-3)}{2} \Rightarrow x = 8$$

נציב את שיעורי ה- y ונקבל:

$$3 = \frac{y + 2}{2} \Rightarrow y = 4$$

לפיכך, הנקודה D היא: (8, 4).

© גבי יקואל
הוצאת משבצת

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

(3) נסמן את שיעורי נקודה P: $P(x, \frac{1}{3}x^2 + 18)$.

מכיוון שהקטע PQ מקביל לציר ה- y הרי שלנקודות P ו-Q יש אותו

שיעור x , לכן: $Q(x, -\frac{1}{6}x^2 + 4x)$.

ומכאן, אורך הקטע PQ הוא:

$$\begin{aligned} f(x)_{PQ} &= y_P - y_Q = \frac{1}{3}x^2 + 18 - \left(-\frac{1}{6}x^2 + 4x\right) = \\ &= \frac{1}{3}x^2 + 18 + \frac{1}{6}x^2 - 4x = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 18 \end{aligned}$$

נגזור, נשווה לאפס ונקבל: $f'(x) = x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

$f''(x) = 1 > 0 \Rightarrow \min$

ומכאן נסיק כי אורכו המינימלי של הקטע PQ הוא: $f(4)$ כלומר:

$$PQ_{\min} = f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 18 = 8 - 16 + 18 = 10$$

תשובה: האורך המינימלי של PQ הוא 10. 

$$S = \int_m^0 (-x^5) dx = -\frac{x^6}{6} \Big|_m^0 = 0 - \left(-\frac{m^6}{6}\right) = \frac{m^6}{6} \quad (4) \quad (א)$$

(ב) נתון כי: $S = -m^5$. נשווה את הערך לביטוי שמצאנו בסעיף (א) ונקבל:

$$-m^5 = \frac{m^6}{6} \quad / \cdot 6$$

$$-6m^5 = m^6$$

בהנחה כי $m \neq 0$, ניתן לצמצם ב- m^5 ולקבל: $m = -6$.

(5) (א) נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת לאפס: $f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$

$$4x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$$

נקבל 3 נקודות חשודות לקיצון: $(2, -25)$, $(-2, -25)$, $(0, -9)$

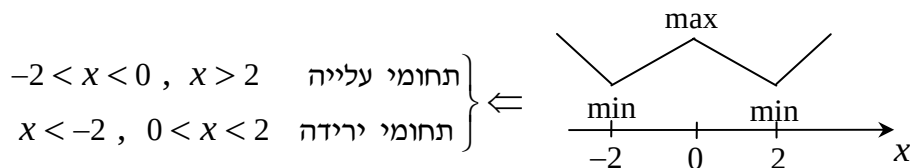
ניעזר בנגזרת שנייה לקביעת סוג הקיצון: $f''(x) = 12x^2 - 16$

נקודת מקסימום: $(0, -9)$ $\Rightarrow f''(0) = -16 < 0$

נקודת מינימום: $(2, -25)$ $\Rightarrow f''(2) = 12 \cdot 2^2 - 16 = 32 > 0$

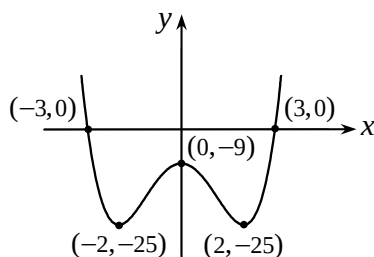
נקודת מינימום: $(-2, -25)$ $\Rightarrow f''(-2) = 12 \cdot (-2)^2 - 16 = 32 > 0$

(ב) מסעיף (א) ומהעובדה שהפונקציה מוגדרת לכל x ניתן למצוא תחומי עלייה וירידה (ניתן גם להיעזר בטבלת חקירה מלאה).



(ג) $f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 - 9 = 81 - 72 - 9 = 0$

$f(-3) = (-3)^4 - 8 \cdot (-3)^2 - 9 = 81 - 72 - 9 = 0$



(ד) כדי לשרטט סקיצה נסמן את כל הנקודות

שמצאנו בסעיפים הקודמים. הערה:

ניתן לענות בקלות על סעיף (ב),

תחומי עלייה וירידה, רק לאחר

שרטוט גרף הפונקציה.

המבחן מופיע גם באתר האינטרנט של משבצת

כתובת האתר: www.mishbetzet.co.il