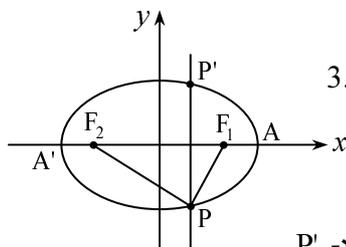


פתרון מבחן מס' 23 (ספר לימוד – שאלון 035807)



(1) (א) סכום מרחקי נקודה על האליפסה מהמוקדים

$$3.2 + 6.8 = 2a \Rightarrow a = 5 \text{ , לכן } 2a \text{ הוא}$$

(שימו לב כי בספר יש טעות במרחקים

של הנקודה P מהמוקדים).

משוואת PP' היא $x = 3$, לכן הנקודות P ו- P'

הן סימטריות ביחס לציר ה- y , ולכן :

$$|y_P| = |y_{P'}| = \frac{1}{2} PP' = \frac{1}{2} \cdot 6.4 = 3.2$$

שיעורי הנקודות P , P' הם $(3, \pm 3.2)$ והנקודות נמצאות על האליפסה,

כלומר שיעורי הנקודות מקיימים את משוואת האליפסה.

$$\frac{3^2}{5^2} + \frac{3.2^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{3.2^2}{b^2} = \frac{4^2}{5^2} \Rightarrow b^2 = \left(\frac{3.2 \cdot 5}{4}\right)^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

מכאן , משוואת האליפסה :

$$\begin{cases} x_{\text{מעגל}} = x_N \\ y_{\text{מעגל}} = y_N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = x \\ y_N = 1.25y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_N \\ y = 0.8y_N \end{cases} \quad (\text{ב})$$

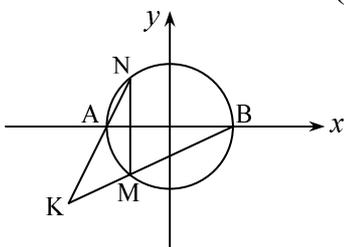
$$\frac{x_N^2}{25} + \frac{(0.8y_N)^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x_N^2}{25} + \frac{y_N^2}{25} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

דרך אחרת:

שיעור ה- x של הנקודות לא השתנה , לכן AA' הוא קוטר המעגל.

$$2R = AA' = 2a = 2 \cdot 5 = 10 \Rightarrow R = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

(ג) $N(t, -p)$, $M(t, p)$, $B(5, 0)$, $A(-5, 0)$



$$m_{AN} = \frac{-p}{t+5} \quad : \text{ משוואת AN}$$

$$y = \frac{-p}{t+5}(x+5)$$

$$m_{BM} = \frac{p}{t-5} \quad : \text{ משוואת BM}$$

$$y = \frac{p}{t-5}(x-5)$$

◀◀◀ המשך בעמוד הבא

מציאת שיעורי הנקודה K (נקודת החיתוך של AN ו-BM):

$$\begin{cases} y = \frac{-p}{t+5}(x+5) \\ y = \frac{p}{t-5}(x-5) \end{cases} \Rightarrow \frac{-p}{t+5}(x+5) = \frac{p}{t-5}(x-5)$$

אם $p \neq 0$ (כלומר $t \neq \pm 5$), אז: $(t-5)(x+5) = -(t+5)(x-5)$

$$tx + 5t - 5x - 25 = -tx + 5t - 5x + 25$$

$$tx = 25 \Rightarrow t = \frac{25}{x}, x = \frac{25}{t} \quad (t \neq 0)$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{p}{t-5}(x-5) = \frac{p}{t-5}\left(\frac{25}{t} - 5\right) = \frac{p}{t-5} \cdot \frac{25-5t}{t} = \\ &= \frac{p}{t-5} \cdot \frac{5(5-t)}{t} = \frac{-5p}{t} \end{aligned}$$

$$p = \frac{-ty}{5} = -\frac{25}{x} \cdot \frac{y}{5} = \frac{-5y}{x}$$

הנקודות M ו-N נמצאות על המעגל, לכן: $t^2 + p^2 = 25$

$$\left(\frac{25}{x}\right)^2 + \left(-\frac{5y}{x}\right)^2 = 25 \Rightarrow \frac{625}{x^2} + \frac{25y^2}{x^2} = 25 \quad \text{מכאן:}$$

$$625 + 25y^2 = 25x^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 25 \quad (x \neq 0, \pm 5)$$

$$z_1 = \text{cis } \alpha, z_2 = \text{cis } \beta, z_3 = \text{cis } \gamma \quad (2) \quad (א)$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

$$(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) + i(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = 0$$

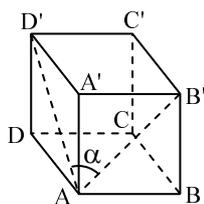
$$\begin{cases} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0 \\ \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} &= \frac{1}{\text{cis } \alpha} + \frac{1}{\text{cis } \beta} + \frac{1}{\text{cis } \gamma} = \\ &= \text{cis}(-\alpha) + \text{cis}(-\beta) + \text{cis}(-\gamma) = \\ &= \cos(-\alpha) + \cos(-\beta) + \cos(-\gamma) + \\ &\quad + i[\sin(-\alpha) + \sin(-\beta) + \sin(-\gamma)] = \end{aligned}$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$\begin{aligned}
 &= \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + i(-\sin \alpha - \sin \beta - \sin \gamma) = \\
 &= (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) - i(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = \\
 &= 0 - i \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

(ב) נתון: $\angle D'AB' = \alpha$, $AA' = h$



(i) נסמן את אורך צלע הבסיס ב- a .

לפי משפט פיתגורס ב- $\triangle ABB'$:

$$a^2 + h^2 = AB'^2 = AD'^2$$

לפי משפט פיתגורס ב- $\triangle B'C'D'$:

$$a^2 + a^2 = D'B'^2 \Rightarrow D'B'^2 = 2a^2$$

לפי משפט הקוסינוסים ב- $\triangle D'AB'$:

$$AD'^2 + AB'^2 - 2 \cdot AD' \cdot AB' \cdot \cos \alpha = D'B'^2$$

$$a^2 + h^2 + a^2 + h^2 - 2(a^2 + h^2) \cdot \cos \alpha = 2a^2$$

$$2(a^2 + h^2) \cdot \cos \alpha = 2h^2 \Rightarrow a^2 + h^2 = \frac{h^2}{\cos \alpha}$$

$$a^2 = h^2 \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \Rightarrow a = h \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}}$$

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} > 0 \Rightarrow 0 < \cos \alpha < 1$$

(ii)

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ 0 < \cos \alpha < 1 \end{cases} \Rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

$$\overrightarrow{CB'} = \underline{w} - \underline{v} \quad (3) \quad (א)$$

$$\overrightarrow{CD'} = \underline{w} - \underline{u}$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} \overrightarrow{AP} = \alpha \cdot \overrightarrow{AD'} + \beta \cdot \overrightarrow{AB'} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC} , \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \textcircled{2} \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{CB'} \\ \textcircled{3} \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{CD'} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AD'} = \underline{v} + \underline{w} , \overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v} , \overrightarrow{AB'} = \underline{u} + \underline{w}$$

לפי $\textcircled{1}$ נקבל:

$$\alpha(\underline{v} + \underline{w}) + \beta(\underline{u} + \underline{w}) + (1 - \alpha - \beta)(\underline{u} + \underline{v}) = \overrightarrow{AP}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (\beta + 1 - \alpha - \beta)\underline{u} + (\alpha + 1 - \alpha - \beta)\underline{v} + (\alpha + \beta)\underline{w} = \\ &= (1 - \alpha)\underline{u} + (1 - \beta)\underline{v} + (\alpha + \beta)\underline{w} \quad \textcircled{4} \end{aligned}$$

לפי $\textcircled{2}$ ו- $\textcircled{3}$:

$$\begin{cases} [(1 - \alpha)\underline{u} + (1 - \beta)\underline{v} + (\alpha + \beta)\underline{w}] \cdot (\underline{w} - \underline{v}) = 0 \\ [(1 - \alpha)\underline{u} + (1 - \beta)\underline{v} + (\alpha + \beta)\underline{w}] \cdot (\underline{w} - \underline{u}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha + \beta) \cdot |\underline{w}|^2 - (1 - \beta) \cdot |\underline{v}|^2 = 0 \\ (\alpha + \beta) \cdot |\underline{w}|^2 - (1 - \alpha) \cdot |\underline{u}|^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha + \beta) \cdot 6 - (1 - \beta) \cdot 2 = 0 \\ (\alpha + \beta) \cdot 6 - (1 - \alpha) \cdot 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 3\beta - 1 + \beta = 0 \\ \alpha + \beta - 2 + 2\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha + 4\beta = 1 \\ 3\alpha + \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{7}{9} , \beta = -\frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{9}\underline{u} + \frac{4}{3}\underline{v} + \frac{4}{9}\underline{w} \quad \text{נציב ב- } \textcircled{4} \text{ ונקבל:}$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$V_{AB'CD'} = V_{\text{תיבה}} - V_{A'AB'D'} - V_{C'CB'D'} - V_{B'ABC} - V_{D'ADC}$$

$$V_{\text{תיבה}} = AB \cdot AD \cdot AA' = \sqrt{12} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 12 \text{ יחידות נפח}$$

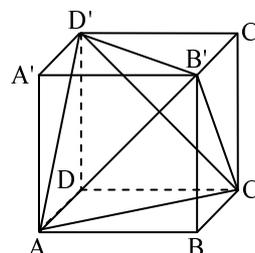
$$\begin{aligned} V_{A'AB'D'} &= \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta A'B'D'} \cdot AA' = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 2 \text{ יחידות נפח} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{C'CB'D'} &= \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta B'CD'} \cdot CC' = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 2 \text{ יחידות נפח} \end{aligned}$$

$$V_{B'ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot BB' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 2 \text{ יחידות נפח}$$

$$V_{D'ADC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ADC} \cdot DD' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 2 \text{ יחידות נפח}$$

$$V_{AB'CD'} = 12 - 2 - 2 - 2 - 2 = 4 \text{ יחידות נפח}$$



(ב)

(ג) נסמן את הזווית בין \vec{AP} ו- $\vec{AA'}$ ב- α , מכאן:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{AP} \cdot \vec{AA'}}{|\vec{AP}| \cdot |\vec{AA'}|} = \frac{\frac{2}{9}(\underline{u} + 6\underline{v} + 2\underline{w}) \cdot \underline{w}}{\frac{2}{9}\sqrt{(\underline{u} + 6\underline{v} + 2\underline{w}) \cdot (\underline{u} + 6\underline{v} + 2\underline{w})} \cdot \sqrt{6}} = \\ &= \frac{2|\underline{w}|^2}{\sqrt{12 + 36 \cdot 2 + 4 \cdot 6 \cdot \sqrt{6}}} = \frac{2 \cdot 6}{\sqrt{108 \cdot 6}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\alpha \approx 61.87^\circ$$

מכאן:

$$A(0,0,0), B(\sqrt{12},0,0), D(0,\sqrt{2},0), A'(0,0,\sqrt{6})$$

(ד)

$$\underline{u} = (\sqrt{12},0,0), \underline{v} = (0,\sqrt{2},0), \underline{w} = (0,0,\sqrt{6})$$

$$\vec{AP} = \frac{2}{9}[(\sqrt{12},0,0) + 6(0,\sqrt{2},0) + 2(0,0,\sqrt{6})] =$$

$$\vec{AP} = \left(\frac{2}{9}\sqrt{12}, \frac{12}{9}\sqrt{2}, \frac{4}{9}\sqrt{6}\right) = \left(\frac{4}{9}\sqrt{3}, \frac{4}{3}\sqrt{2}, \frac{4}{9}\sqrt{6}\right)$$

$$P\left(\frac{4}{9}\sqrt{3}, \frac{4}{3}\sqrt{2}, \frac{4}{9}\sqrt{6}\right)$$

כלומר:

$$M_0^{(1)} = \text{טון } 12, M_1^{(1)} = \text{טון } 16.8 \quad (4) \text{ בריכה I :}$$

$$q_1 = \frac{M_1}{M_0} = \frac{16.8}{12} = 1.4$$

$$M_t^{(1)} = 12 \cdot 1.4^t$$

$$M_0^{(2)} = \text{טון } 2, M_1^{(2)} = \text{טון } 3.92 \quad (4) \text{ בריכה II :}$$

$$q_2 = \frac{M_1}{M_0} = \frac{3.92}{2} = 1.96, M_t^{(2)} = 2 \cdot 1.96^t$$

$$M_t^{(1)} = M_t^{(2)} \quad (א) \text{ } t \text{ – מספר חודשים}$$

$$12 \cdot 1.4^t = 2 \cdot 1.96^t \Rightarrow 6 = \frac{1.96^t}{1.4^t} \Rightarrow 1.4^t = 6$$

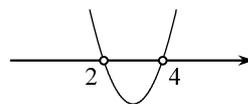
$$t = \log_{1.4} 6 = \frac{\ln 6}{\ln 1.4} \approx 5.325 \text{ חודשים}$$

$$M_t^{(1)} - M_t^{(2)} > 16 \Rightarrow 12 \cdot 1.4^t - 2 \cdot 1.96^t > 16 \quad (ב)$$

נסמן: $1.4^t = a$, מכאן: $1.96^t = a^2$.

$$12a - 2a^2 > 16 \Rightarrow a^2 - 6a + 8 < 0$$

$$2 < a < 4 \Rightarrow 2 < 1.4^t < 4$$



$$\log_{1.4} 2 < t < \log_{1.4} 4$$

$$2.06 < t < 4.12 \text{ חודשים}$$

(ג) פונקציית הפרש הכמויות בין הדגים בבריכה I לבין בריכה II היא:

$$F = M_t^{(1)} - M_t^{(2)} = 12 \cdot 1.4^t - 2 \cdot 1.96^t$$

$$F'(t) = 12 \cdot 1.4^t \ln 1.4 - 2 \cdot 1.96^t \cdot \ln 1.96$$

$$F'(t) = 0 \Rightarrow 12 \cdot 1.4^t \ln 1.4 - 2 \cdot (1.4^t)^2 \cdot 2 \ln 1.4 = 0$$

$$4 \cdot 1.4^t \ln 1.4 (3 - 1.4^t) = 0$$

$4 \cdot 1.4^t \cdot \ln 1.4 \neq 0$ לכל ערך של t , לכן:

$$3 - 1.4^t = 0 \Rightarrow 1.4^t = 3$$

$$t = \log_{1.4} 3 = \frac{\ln 3}{\ln 1.4} \approx 3.265 \text{ חודשים}$$

המשך בעמוד הבא <<<

t	$0 < t < 3.265$	$t = 3.265$	$t > 3.265$
$F'(t)$	+	0	-
$F(t)$	↗	max	↘

$$F'(1) = (+) \cdot (3 - 1.4) > 0$$

$$F'(4) = (+) \cdot (3 - 1.4^4) < 0$$

ההפרש יהיה מקסימלי כעבור 3.265 חודשים מהחודש המסוים.

$$F_{\max} = F(3.265) = F(1.4^t = 3) = 12 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 = 18 \text{ טון} \quad (ד)$$

$$f(x) = e^{-|x|} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ e^x & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

(א) עבור $a > 0$:

$$f'(x) = -e^{-x} \quad (i)$$

$$m_{\text{משיק}} = f'(a) = -e^{-a}$$

$$y - e^{-a} = -e^{-a}(x - a) \Rightarrow y = -e^{-a}x + ae^{-a} + e^{-a}$$

(ii) שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- y :

$$x = 0 \Rightarrow y = e^{-a}(a + 1) \Rightarrow (0, (a + 1)e^{-a})$$

שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- x :

$$y = 0 \Rightarrow x = a + 1 \Rightarrow (a + 1, 0)$$

$$(a + 1)e^{-a} > 0 \quad (iii)$$

$$a + 1 > 0$$

$$S = \frac{(a+1) \cdot e^{-a} \cdot (a+1)}{2} = \frac{e^{-a} \cdot (a+1)^2}{2}$$

$$S' = \frac{2 \cdot (a+1) \cdot e^{-a} - e^{-a} \cdot (a+1)^2}{2} = \frac{(a+1) \cdot e^{-a} \cdot (2 - a - 1)}{2}$$

$$S' = 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$$

המשך בעמוד הבא <<<

a	$0 < a < 1$	$a = 1$	$a > 1$
$S'(a)$	+	0	-
$S(a)$	↗	max	↘

$$S'(0.5) = (+) \cdot (1 - 0.5) > 0$$

$$S'(2) = (+) \cdot (1 - 2) < 0$$

$$S_{\max} = S(1) = \frac{(1+1)^2 \cdot e^{-1}}{2} = \frac{2}{e} \text{ יחידות שטח} \quad (iv)$$

עבור $a < 0$:

$$f'(x) = e^x \quad (i)$$

$$m_{\text{משיק}} = e^a$$

$$y - e^a = e^a(x - a) \Rightarrow y = e^a x - a e^a + e^a$$

(ii) שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- y :

$$x = 0 \Rightarrow y = e^a(1 - a) \Rightarrow (0, (1 - a)e^a)$$

שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- x :

$$y = 0 \Rightarrow x = a - 1 \Rightarrow (a - 1, 0)$$

$$(1 - a)e^a > 0 \quad (iii)$$

$$a - 1 < 0$$

$$S = \frac{(1 - a) \cdot e^a \cdot (1 - a)}{2} = \frac{e^a \cdot (1 - a)^2}{2}$$

$$S' = \frac{e^a \cdot (1 - a)^2 - 2e^a \cdot (1 - a)}{2} = \frac{e^a \cdot (1 - a) \cdot (1 - a - 2)}{2}$$

$$S' = 0 \Rightarrow -a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

a	$a < -1$	$a = -1$	$-1 < a < 0$
$S'(a)$	+	0	-
$S(a)$	↗	max	↘

המשך בעמוד הבא <<<

$$S'(-2) = (+) \cdot (-1 + 2) > 0$$

$$S'(-0.5) = (+) \cdot (-1 + 0.5) < 0$$

$$S_{\max} = S(-1) = \frac{e^{-1} (1+1)^2}{2} = \text{יחידות שטח } \frac{2}{e} \quad (iv)$$

(ב) נמצא את שיעורי נקודת החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות :

$$e^{-|x|} = \frac{1}{e} \Rightarrow e^{-|x|} = e^{-1} \Rightarrow -|x| = -1$$

$$|x| = 1 \Rightarrow x = 1, x = -1$$

$$I = \int_{-1}^1 (e^{-|x|} - \frac{1}{e}) dx = \int_{-1}^0 (e^x - \frac{1}{e}) dx + \int_0^1 (e^{-x} - \frac{1}{e}) dx =$$

$$= (e^x - \frac{x}{e}) \Big|_{-1}^0 + (-e^{-x} - \frac{x}{e}) \Big|_0^1 =$$

$$= 1 - 0 - (\frac{1}{e} + \frac{1}{e}) + (-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}) - (-1 - 0) =$$

$$= 1 - \frac{2}{e} + 1 - \frac{2}{e} = 2 - \frac{4}{e}$$

$$S = I = \text{יחידות שטח } (2 - \frac{4}{e}) \quad \text{לכן } 2 - \frac{4}{e} > 0$$

גבי יקואל

מ ש ב צ ת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות