

פתרונות מבחן מס' 20 (ספר לימוד – שאלון 035807)

(1) נסמן ב- O את ראשית הצירים וב- K את נקודת החיתוך של הישר BD עם ציר ה- x .

$$OD \perp OB \Rightarrow m_{OD} \cdot m_{OB} = -1$$

$$m_{OD} \cdot m = -1 \Rightarrow m_{OD} = -\frac{1}{m}$$

$$y = -\frac{1}{m}x \quad : \text{ משוואת } OD$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{m}x \\ y^2 = 12x \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{x}{m}\right)^2 = 12x \quad : \text{ נמצא את שיעורי הנקודה D}$$

$$\frac{x^2}{m^2} = 12x \Rightarrow x^2 - 12m^2x = 0 \Rightarrow x(x - 12m^2) = 0$$

מתאים לנקודה O

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{m} \cdot 12m^2 = -12m$$

כלומר: $D(12m^2, -12m)$

$$\begin{cases} y = mx \\ y^2 = 12x \end{cases} \Rightarrow (mx)^2 = 12x \quad : \text{ נמצא את שיעורי הנקודה B}$$

$$m^2x^2 = 12x \Rightarrow x(m^2x - 12) = 0$$

מתאים לנקודה O

$$x = \frac{12}{m^2} \Rightarrow y = m \cdot \frac{12}{m^2} = \frac{12}{m}$$

כלומר: $B\left(\frac{12}{m^2}, \frac{12}{m}\right)$

$$m_{BD} = \frac{y_B - y_D}{x_B - x_D} = \frac{\frac{12}{m^2} + 12m}{\frac{12}{m^2} - 12m^2} = \frac{12m + 12m^3}{12 - 12m^4} =$$

$$= \frac{m(1+m^2)}{1-m^4} = \frac{m(1+m^2)}{(1-m^2)(1+m^2)} = \frac{m}{1-m^2} \quad (m \neq \pm 1)$$

המשך בעמוד הבא <<

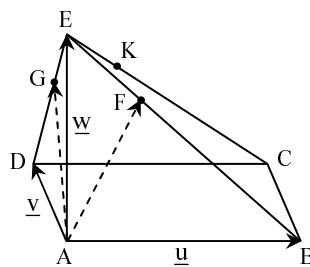
$$y - y_B = m_{BD} (x - x_B) \quad : BD$$

$$y - \frac{12}{m} = \frac{m}{1-m^2} \left(x - \frac{12}{m^2} \right)$$

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{12}{m} = \frac{m}{1-m^2} \left(x - \frac{12}{m^2} \right) \Rightarrow \frac{-12(1-m^2)}{m^2} = x - \frac{12}{m^2}$$

$$-\frac{12}{m^2} + 12 = x - \frac{12}{m^2} \Rightarrow x_K = 12 = \text{const}$$

כלומר x אינו תלוי ב- m



$$\overrightarrow{DE} = \underline{w} - \underline{v}, \quad \overrightarrow{DC} = \underline{u} \quad (i) \quad (ii) \quad (iii)$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DE} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$$

$$\overrightarrow{EK} = t \cdot \overrightarrow{EC} = t\underline{u} + t\underline{v} - t\underline{w}$$

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EK} = \underline{w} + t\underline{u} + t\underline{v} - t\underline{w} = t\underline{u} + t\underline{v} + (1-t)\underline{w}$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \underline{v} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DE} = \underline{v} + \frac{2}{3}(\underline{w} - \underline{v}) = \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}\underline{w} \quad (ii)$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \underline{u} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} = \underline{u} + \frac{2}{3}(\underline{w} - \underline{u}) = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{w}$$

$$\overrightarrow{AK} = \alpha \cdot \overrightarrow{AG} + \beta \cdot \overrightarrow{AF} = \alpha \cdot \left(\frac{1}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}\underline{w} \right) + \beta \cdot \left(\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{w} \right)$$

$$t\underline{u} + t\underline{v} + (1-t)\underline{w} = \frac{\alpha}{3} \cdot (\underline{v} + 2\underline{w}) + \frac{\beta}{3} \cdot (\underline{u} + 2\underline{w})$$

$$t\underline{u} + t\underline{v} + (1-t)\underline{w} = \frac{\beta}{3}\underline{u} + \frac{\alpha}{3}\underline{v} + \frac{2(\alpha+\beta)}{3}\underline{w}$$

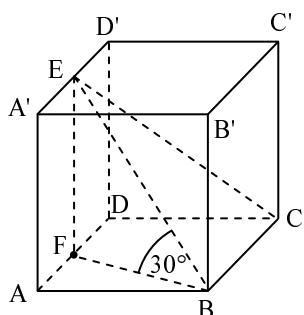
$$\begin{cases} t = \frac{\beta}{3} \\ t = \frac{\alpha}{3} \\ 1-t = \frac{2(\alpha+\beta)}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 3t \\ \alpha = 3t \\ 1-t = \frac{2(3t+3t)}{3} \end{cases}$$

$$1-t = 4t \Rightarrow t = \frac{1}{5} \quad \text{מהמשוואת השלישית קיבל:}$$

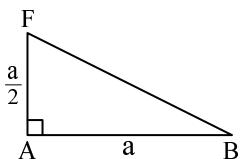
$$EK = \frac{1}{5}EC \Rightarrow EK : KC = 1 : 4$$

המשך בעמוד הבא

(ב) הנקודות A , G , F , נמצאות במישור π (שלוש נקודות שאינן על ישר אחד, קובעת את המישור).
 קומבינציה לינארית של וקטורי הכיוון של המישור π \overrightarrow{AK} (לכן גם הנקודה K נמצאת במישור π)
 $\overrightarrow{AK} = \alpha \cdot \overrightarrow{AG} + \beta \cdot \overrightarrow{AF}$.



(3) $BE \perp AD$, שכן $BF \perp AD$ (זווית בין מישור הבסיס, $\angle EBF = 30^\circ$).
 על המישור $ABCD$, כלומר $\angle EBF$ היא הזווית בין BE לביין מישור הבסיס, $\angle EBF = 30^\circ$.
 נסמן את אורך צלע הבסיס ב- a , אז ב- ΔBAF לפי משפט פיתגורס:



$$FB^2 = FA^2 + AB^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$FB = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{EF}{FB} \Rightarrow EF = FB \tan 30^\circ : \Delta BEF$$

$$EF = h = \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$$

(א) נבחר נקודה G – אמצע הקטע BC .

$. FB = FC$ $\Delta FAB \cong \Delta FDC$ (פי משפט חפיפה צ.צ.צ), לכן:

$, EB = EC$ $\Delta EFB \cong \Delta EFC$ (פי משפט חפיפה צ.צ.צ), לכן:

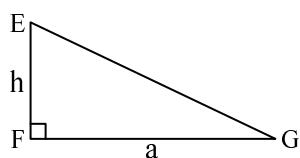
ו- ΔBCE הוא משולש שווה-שוקיים. מכאן, $EG \perp BC$

(תיכון לבסיס במשולש שווה-שוקיים הוא גם גובה לבסיס).

כמו כן, $FG \perp BC$, שכן הזווית המבוקשת (הזווית בין מישור BCE

לבין מישור הבסיס) היא $\angle EGF$.

המשך בעמוד הבא ▶▶



$$\tan \angle G = \frac{FE}{FG} = \frac{h}{a} \quad : \Delta EGF \text{ ב-}$$

$$\tan \angle G = \frac{a\sqrt{15}}{6a} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$\angle EGF \approx 32.84^\circ$$

$$EB^2 = EF^2 + FB^2 \quad : \Delta BFE \text{ ב-}$$

$$EB^2 = \left(\frac{a\sqrt{15}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{12} + \frac{5a^2}{4} = \frac{5a^2}{3} \Rightarrow EB = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$$AE^2 = AF^2 + FE^2 \quad : \Delta AFE \text{ ב-}$$

$$AE^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{15}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{5a^2}{12} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{לפי משפט הקוסינוסים ב- } \Delta ABE$$

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2 \cdot AB \cdot BE \cdot \cos \angle B$$

$$\frac{2a^2}{3} = a^2 + \frac{5a^2}{9} - 2 \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{15}}{3} \cdot \cos \angle B$$

$$\frac{2}{3}a^2\sqrt{15}\cos \angle B = 2a^2 \Rightarrow \cos \angle B = \frac{3}{\sqrt{15}}$$

$$\angle B = \angle EBA \approx 39.23^\circ$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x}(2x + 2a - x^2 - 2ax - b) = \\ &= e^{-x}[-x^2 + x(2 - 2a) + 2a - b] \end{aligned} \quad (\text{א}) \quad (4)$$

ניעזר בנתון ונקבל :

$$\begin{aligned} f(-2) &= 0 \Rightarrow e^2(4 - 4a + b) = 0 \\ f'(-2) &= 0 \Rightarrow e^2(-4 - 4 + 4a + 2a - b) = 0 \\ -\begin{cases} 4a - b = 4 \\ 6a - b = 8 \end{cases} &\Rightarrow -2a = -4 \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

$$4 \cdot 2 - b = 4 \Rightarrow b = 4$$

$$f(x) = (x^2 + 4x + 4)e^{-x} = (x + 2)^2 e^{-x} \quad (\text{ב})$$

$$f'(x) = e^{-x}(-x^2 - 2x) = -x(x + 2)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x(x + 2)e^{-x} = 0$$

$$-x(x + 2) = 0 \quad \text{לכל } x, \text{ שכן : } e^{-x} > 0$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 4$$

$$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = 0$$

| x | x < -2 | x = -2 | 0 < x < 2 | x = 0 | x > 0 |
|-------|--------|--------|-----------|-------|-------|
| f'(x) | - | 0 | + | 0 | - |
| f(x) | ↘ | min | ↗ | max | ↘ |

$$f'(-3) = 3 \cdot (-1) \cdot (+) < 0 \quad f'(-1) = 1 \cdot 1 \cdot (+) > 0$$

$$f'(1) = -1 \cdot 3 \cdot (+) < 0$$

תשובה : $\min(-2, 0), \max(0, 4)$

$$\begin{aligned} f''(x) &= [e^{-x}(-x^2 - 2x)]' = e^{-x}(x^2 + 2x - 2x - 2) = \\ &= e^{-x}(x^2 - 2) = e^{-x}(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \end{aligned} \quad (\text{ג})$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{לכל } x, \text{ שכן : } e^{-x} > 0$$

$$x_1 = \sqrt{2} \Rightarrow y_1 = (2 + \sqrt{2})^2 e^{-\sqrt{2}} \approx 2.834$$

$$x_2 = -\sqrt{2} \Rightarrow y_2 = (2 - \sqrt{2})^2 e^{\sqrt{2}} \approx 1.411$$

המשך בעמוד הבא

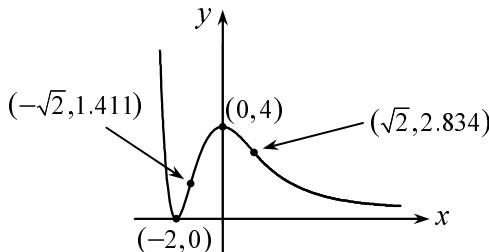
| x | $x < -\sqrt{2}$ | $x = -\sqrt{2}$ | $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ | $x = \sqrt{2}$ | $x > \sqrt{2}$ |
|----------|-----------------|-----------------|----------------------------|----------------|----------------|
| $f''(x)$ | + | | - | | + |
| f(x) | ↑ | | ↓ | | ↑ |

$$f''(-2) = (+) \cdot 2 > 0 \quad f''(0) = (+) \cdot (-2) < 0$$

$$f''(2) = (+) \cdot 2 > 0$$

כלומר שיעורי נקודות הפיתול: $(-\sqrt{2}, 1.411), (\sqrt{2}, 2.834)$

(ד) ראו סרטוט משמאל.



מג' $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases}$: (א) תחום הגדרה (5)

. $x > 0, x \neq 1$: תשובה

$$f'(x) = \left(\ln x + \frac{4}{\ln x}\right)' = \frac{1}{x} - \frac{4}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln^2 x - 4}{x \ln^2 x} \quad (ב)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln^2 x - 4}{x \ln^2 x} = 0 \Rightarrow \ln^2 x = 4$$

$$\ln x = 2 \Rightarrow x_1 = e^2 \Rightarrow y_1 = 2 + \frac{4}{e^2} = 4 \Rightarrow (e^2, 4)$$

$$\ln x = -2 \Rightarrow x_2 = e^{-2} \Rightarrow y_2 = -2 + \frac{4}{e^{-2}} = -4 \Rightarrow (e^{-2}, -4)$$

| x | $x \leq 0$ | $0 < x < \frac{1}{e^2}$ | $x = \frac{1}{e^2}$ | $\frac{1}{e^2} < x < 1$ |
|---------|--------------------|-------------------------|---------------------|-------------------------|
| $f'(x)$ | נקודות אי-הגדרה | + | 0 | - |
| f(x) | | ↗ | max | ↘ |

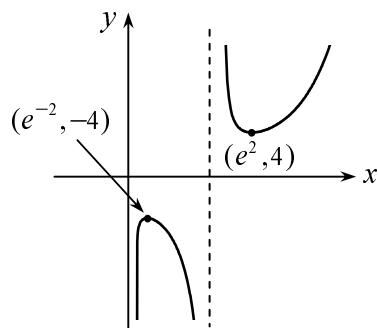
המשך בעמוד הבא ▶◀◀

| x | $x = 1$ | $1 < x < e^2$ | $x = e^2$ | $x > e^2$ |
|---------|--------------------|---------------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ | נקודות אי-הגדלה | - | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↘ | min | ↗ |

$$f'(0.001) = \frac{+}{+} > 0 \quad f(0.9) = \frac{-}{+} < 0$$

$$f'(e) = \frac{1-4}{+} < 0 \quad f(e^3) = \frac{9-4}{+} > 0$$

. $\max(e^{-2}, -4)$, $\min(e^2, 4)$ **תשובה:**



(א) ראו סרטוט משמאל.

(ב) $y = k$ הוא ישר המקביל לציר ה- x .

לפי הגרף בסעיף (א), לישר $y = k$

ולגרף הפונקציה אין נקודות משותפות

כאשר $y_{\max} < y < y_{\min}$

. $-4 < k < 4$ **כלומר:**



טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

❖ לכל ה大雨ות ❖ לכל השאלונים ❖ לכל הרמות