# פתרון מבחן מס' 6 (ספר לימוד – שאלון 035806)

**(1)** נסמן ב- $x$ $\frac{\text{מטר}}{\text{שנייה}}$ את מהירותה של תמי,

וב- $y$ $\frac{\text{מטר}}{\text{שנייה}}$ את מהירותו של טל.

עד הפגישה הראשונה הרצים עברו 48 מטרים, לכן: $\frac{48}{x}-\frac{48}{y}=3$

עד הפגישה השנייה הרצים עבור יחד פעמיים את המרחק AB ,

כלומר 176 מטר $=88\cdot 2$ , ותמי רצה 3 שניות יותר מטל, לכן:

$$12y+(12+3)x=176 \quad\Rightarrow\quad 15x+12y=176$$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases}\frac{48}{x}-\frac{48}{y}=3 \quad /\cdot\frac{xy}{3}\\ 15x+12y=176\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}16y-16x=xy\\ y=\frac{176-15x}{12}\end{cases}$$

$$16\cdot\frac{176-15x}{12}-16x=x\cdot\frac{176-15x}{12} \quad /\cdot 12$$

$$2,816-240x-192x=176x-15x^2 \quad\Rightarrow\quad 15x^2-608x+2,816=0$$

$$x_{1,2}=\frac{608\pm 448}{30} \quad\Rightarrow\quad x_1=35.2\ ,\ x_2=\frac{16}{3}$$

$x_1=35.2 \Rightarrow y=\frac{176-15\cdot 35.2}{12}=-29\frac{1}{3}$ ולא תיתכן מהירות שלילית

לכן: $x=\frac{16}{3}$

$$y=\frac{176-15\cdot\frac{16}{3}}{12}=\frac{96}{12}=8$$

נסמן ב- t שניות את הזמן שעבר מהזינוק של תמי עד הפגישה השנייה, מכאן:

$$t\cdot\frac{16}{3}+(t-3)\cdot 8=176 \quad\Rightarrow\quad \frac{40}{3}t=200 \quad\Rightarrow\quad t=\text{15 שניות}$$

במשך זמן זה, תמי עברה: 80 מ' $=15\cdot\frac{16}{3}$ , כלומר הפגישה השנייה

התרחשה במרחק: 8 מ' $=88-80$ מנקודה B .

**(2)** נוכיח כי הסדרה $a_n$ היא סדרה חשבונית.

$$a_{n+1}-a_n=\left[3(n+1)-12\right]-\left(3n-12\right)$$
$$a_{n+1}-a_n=3n+3-12-3n+12=3$$

מכיוון שההפרש בין כל איבר (פרט לאיבר הראשון) לאיבר שלפניו הוא גודל קבוע, הרי ש- $a_n$ זו סדרה חשבונית שבה $d=3$ , $a_1=3\cdot 1-12=-9$ .

סכום n האיברים הראשונים בסדרה $a_n$ הוא:

$$S_n=\frac{\left[2\,(-9)+(n-1)\cdot 3\right]n}{2}=\frac{(-18+3n-3)\,n}{2}$$

כלומר:
$$S_n=\frac{(3n-21)\,n}{2}=1.5n^2-10.5n$$

ומכאן נקבל:
$$b_{n+1}-b_n=1.5n^2-10.5n+18$$

מכיוון שבסדרה $b_n$ יש איברים עוקבים השווים זה לזה,
הרי שההפרש $b_{n+1}-b_n$ שווה לאפס עבורם. כלומר:

$$1.5n^2-10.5n+18=0$$
$$n^2-7n+12=0$$

פתרון המשוואה:
$$n_2=4\ ,\ n_1=3$$

כלומר $b_4-b_3=0$ וגם $b_5-b_4=0$ .
לכן, $b_3=b_4=b_5$ כלומר, האיברים העוקבים השווים זה לזה נמצאים במקומות השלישי, הרביעי והחמישי.

**(3)** נסמן: $P(\text{טעים לי})=a$ , מכאן:
$$P(\text{טעם וריח})=1-a$$
$$P(\text{טעים לי}\cap\text{אורגנית})=0.4a$$
$$P(\text{טעים לי}\cap\text{לא אורגנית})=a-0.4a=0.6a$$
$$P(\text{טעם וריח}\cap\text{אורגנית})=0.7(1-a)=0.7-0.7a$$
$$P(\text{טעם וריח}\cap\text{לא אורגנית})=0.3(1-a)=0.3-0.3a$$
$$P(\text{אורגנית})=0.4a+0.7-0.7a=0.7-0.3a$$
$$P(\text{לא אורגנית})=0.6a+0.3-0.3a=0.3+0.3a$$

*המשך בעמוד הבא* ◄◄◄

(א) נתון כי: $P(\text{טעים לי}) = \frac{15}{13} \cdot P(\text{אורגנית}) \Rightarrow a = \frac{15}{13}(0.7 - 0.3a)$

$13a = 10.5 - 4.5a \Rightarrow 17.5a = 10.5 \Rightarrow a = 0.6$

$P(\text{משה קנה מוצר מתוצרת אורגנית}) = 0.7 - 0.3a = 0.7 - 0.3 \cdot 0.6 = 0.52$

(ב) $P(\text{אורגנית} \,/\, \text{טעם וריח}) = \frac{0.7 - 0.7a}{0.7 - 0.3a} = \frac{0.7 - 0.7 \cdot 0.6}{0.7 - 0.3 \cdot 0.6} = \frac{0.28}{0.52} = \frac{7}{13}$

(ג) $P(\text{לא אורגנית} \,/\, \text{טעים לי}) = \frac{0.6a}{0.3 + 0.3a} = \frac{0.6 \cdot 0.6}{0.3 + 0.3 \cdot 0.6} = \frac{0.36}{0.48} = \frac{3}{4}$

**(4)** (א)

| | **טענה** | **נימוק** |
|---|---|---|
| (1) | $AO = OF = OD = r$ | נובע מהנתונים ש- $O$ מרכז המעגל החוסם את $\Delta ADF$ ו- $OD = r$. |
| (2) | $AB = AF + BF$ | חיבור קטעים. |
| (3) | $AF = AO + OF$ | חיבור קטעים. |
| (4) | $AB = 2r + 2r = 4r$ | נובע מ- (1), (2), (3) ומהנתון $BF = 2OD$. |
| (5) | $BC = 4r$ | נובע מ- (4) ומהנתון כי $\Delta ABC$ הוא משולש שווה-צלעות. |
| (6) | $EB = 2r$ | נובע מ-(5) ומהנתון $BC = 2EB$. |
| (7) | $BF = 2r$ | נובע מהנתונים $OD = r$ , $BF = 2OD$. |
| (8) | $EB = BF$ | נובע מ- (6) ומ- (7). |

$\Delta BEF$ הוא משולש שווה שוקיים.

(ב)

| | **טענה** | **נימוק** |
|---|---|---|
| (9) | $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 60^\circ$ | נובע מהנתון ש- $\Delta ABC$ הוא משולש שווה-צלעות ומכך שבמשולש מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ושסכום הזוויות במשולש הוא $180^\circ$. |

*המשך בעמוד הבא* >>>

| | | |
|---|---|---|
| (10) | $\measuredangle ADO = 60^\circ$ | נובע מ- (9) ומהנתון ש- O מרכז המעגל החוסם את $\Delta ADF$ , $OD = OA$ כרדיוסים במעגל ושבמשולש מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות. |
| (11) | $OD \parallel BC$ | נובע מ- (9) , (10) ומכך שאם זוויות מתאימות שוות אז הישרים מקבילים. |
| (12) | $\frac{AD}{DC} = \frac{AO}{OB}$ | לפי תאלס ו- (11). |
| (13) | $OB = 3r$ | לפי (1) , (7) וחיבור קטעים $OB = OF + BF$ |
| (14) | $AD = r$ | נובע מ- (9) , (10) , מסכום זוויות במשולש הוא $180^\circ$ , ומכך שבמשולש מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות. |
| (15) | $\frac{AD}{DC} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$ | לפי (1) , (12) , (13) , (14). |

(ג)

| | **טענה** | **נימוק** |
|---|---|---|
| (16) | $\measuredangle AOD = 60^\circ$ | נובע מ- (1) , (10) , (14) במשולש מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות. |
| (17) | $\measuredangle DOF = 120^\circ$ | נובע מ- (16) ומסכום זוויות צמודות שווה ל- $180^\circ$ . |
| (18) | $\measuredangle FBE = 120^\circ$ | נובע מ- (9) ומסכום זוויות צמודות שווה ל- $180^\circ$ . |
| (19) | $\measuredangle OFD = \measuredangle BFE$ | זוויות קדקודיות שוות. |
| (20) | $\Delta BEF \sim \Delta ODF$ | נובע מ- (17) , (18) , (19) וממשפט דמיון ז.ז. |
| (21) | $\frac{EF}{FD} = \frac{BE}{OD}$ | נובע מ- (20) פרופורציית צלעות מתאימות במשולשים דומים. |
| (22) | $\frac{EF}{FD} = \frac{2r}{r} = 2$ | נובע מ- (6) ומ- (21) ומהנתון $OD = r$ . |

*המשך בעמוד הבא* ◄◄◄

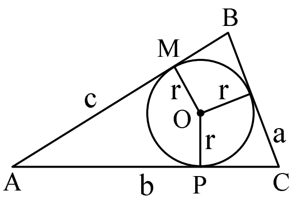
(ד)

| | טענה | נימוק |
|---|---|---|
| (23) | $AF = 2r \;,\; BF = 2r$ | נובע מ- (1) , (3) , (7). |
| (24) | $AM=ME$ | נובע מהנתון ש- M מרכז המעגל החוסם את $\Delta ADE$ . |
| (25) | $\frac{AM}{ME} = \frac{AF}{BF} = 1$ | נובע מ- (23) , (24). |
| (26) | $MF \parallel BE$ | נובע מ- (25) המשפט ההפוך למשפט תאלס. |
| (27) | $OD \parallel MF$ | נובע מ- (11) , (26) ומכך ששני ישרים המקבילים לישר שלישי מקבילים ביניהם. |

(ה)

| | טענה | נימוק |
|---|---|---|
| (28) | $\frac{MF}{EB} = \frac{AF}{AB}$ | לפי (27) ולפי משפט תאלס. |
| (29) | $\frac{MF}{2r} = \frac{2r}{4r} = \frac{1}{2}$ | לפי (4) , (6) , (23) , (28). |
| (30) | $MF = \frac{1}{2} \cdot 2r = r$ | לפי (29). |

**(5)** (א)




$$S_{\Delta ABC} = S = S_{\Delta AOC} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOB}$$

$$S = \frac{AC \cdot OP}{2} + \frac{BC \cdot ON}{2} + \frac{AB \cdot OM}{2}$$

$$S = \frac{br}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$

(ב) ($i$) נתון: $BA = c$ ס"מ , לכן: $BC = 14 - c$ ס"מ ,
$AC = 12$ ס"מ , $\measuredangle BAC = 26.384°$ .
לפי משפט הקוסינוסים ב- $\Delta ABC$ :

$$(14-c)^2 = c^2 + 12^2 - 2 \cdot c \cdot 12 \cdot \cos 26.384°$$

$$196 - 28c + c^2 = c^2 + 144 - 21.5c$$

$6.5c = 52 \;\Rightarrow\; c = AB = 8$ ס"מ $\;\Rightarrow\; BC = 14 - 8 = 6$ ס"מ

($ii$) $S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \sin \measuredangle A = \frac{8 \cdot 12}{2} \sin 26.384° \approx 21.33$ סמ"ר

לפי סעיף (א) :

$r = \frac{2 \cdot S_{\Delta ABC}}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 21.33}{6+12+14} \approx 1.641$ ס"מ

**(6)** (א) לפי משפט הקוסינוסים ב- $\Delta ADC$ :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos \measuredangle D$$

$$AC^2 = d^2 + a^2 - 2ad\cos\beta \quad (*)$$

נעביר $AK \perp DC$ .

$$DK = \frac{DC - AB}{2} = \frac{a-b}{2}$$

במשולש ישר-זווית $ADK$ :

$$\cos\beta = \frac{DK}{AD} \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{a-b}{2d}$$

נציב את הערך של $\cos\beta$ ב- $(*)$ :

$$AC^2 = d^2 + a^2 - 2ad \cdot \frac{a-b}{2d} =$$

$$= d^2 + a^2 - a^2 + ab = ab + d^2$$

$$AC = \sqrt{ab + d^2}$$

(ב) $\measuredangle BCD = \measuredangle CDA = \beta$ (זווית בסיס שוות בטרפז שווה-שוקיים)

$\measuredangle ACB = \beta - \alpha$ (חיסור זוויות)

לפי משפט הסינוסים ב- $\Delta ABC$ :

$$\frac{AB}{\sin \measuredangle C} = \frac{BC}{\sin \measuredangle A}$$

$$\frac{b}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{d}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{d}{b} \quad (**)$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \measuredangle DAC = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ$$

(סכום זוויות ב- $\Delta ACD$ שווה ל- $180^\circ$).

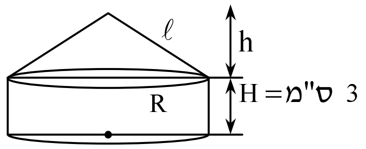
לפי משפט פיתגורס ב- $\Delta ACD$ :

$$AD^2 + AC^2 = DC^2$$

$$d^2 + ab + d^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a^2 - 2d^2}{a}$$

נציב את הביטוי שקיבלנו ב- $(**)$ ונקבל:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{d}{\frac{a^2-2d^2}{a}} = \frac{ad}{a^2 - 2d^2}$$

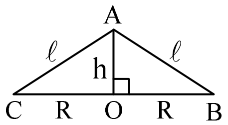



**(7)** נתון: $H = 3$ ס"מ , $\ell = 9$ ס"מ

פונקציית המטרה: $V = V_{\text{גליל}} + V_{\text{חרוט}}$

$$V = \pi R^2 H + \tfrac{1}{3}\pi R^2 h$$

חתך החרוט הוא משולש שווה-שוקיים.




לפי משפט פיתגורס: $\ell^2 = h^2 + R^2 \;\Rightarrow\; h^2 = \ell^2 - R^2$

$$h = \sqrt{\ell^2 - R^2} = \sqrt{81 - R^2}$$

$$V = V(R) = \pi R^2 \cdot 3 + \tfrac{1}{3}\pi R^2 \sqrt{81-R^2} = \tfrac{\pi R^2}{3}\left(9 + \sqrt{81-R^2}\right)$$

$$V'(R) = \tfrac{\pi}{3}\left[2R\left(9+\sqrt{81-R^2}\right) + R^2 \cdot \frac{-2R}{2\sqrt{81-R^2}}\right]$$

$$V'(R) = 0 \;\Rightarrow\; \tfrac{\pi}{3}\left(18R + 2R\sqrt{81-R^2} - \frac{R^3}{\sqrt{81-R^2}}\right) = 0 \quad / \cdot \frac{\sqrt{81-R^2}}{R}$$

$$18\sqrt{81-R^2} + 162 - 2R^2 - R^2 = 0 \;\Rightarrow\; 18\sqrt{81-R^2} = 3R^2 - 162 \quad /:3$$

$$6\sqrt{81-R^2} = R^2 - 54 \;\Rightarrow\; \begin{cases} R > \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \\ R < 9 \end{cases} \;\Rightarrow$$ $3\sqrt{6} < R < 9$ ס"מ

$$36(81 - R^2) = R^4 - 108R^2 + 2{,}916$$

$$R^4 - 72R^2 = 0 \;\Rightarrow\; R^2(R^2 - 72) = 0$$

$R = 0 \;\Rightarrow$ לא מתאים לפי נתוני השאלה

$R^2 = \pm\sqrt{72}$ , $R > 0 \;\Rightarrow\; R = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ ס"מ

| $R$ | $R = 3\sqrt{6}$ | $3\sqrt{6} < R < 6\sqrt{2}$ | $R = 6\sqrt{2}$ | $6\sqrt{2} < R < 9$ | $R = 9$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(R)$ | נקודת אי-הגדרה | $+$ | $0$ | $-$ | נקודת אי-הגדרה |
| $V(R)$ | נקודת אי-הגדרה | ↗ | max | ↘ | נקודת אי-הגדרה |

$$V'(8) = (+)\left(18\sqrt{81-64} - 3\cdot 8^2 + 162\right) > 0$$

$$V'(8.5) = (+)\left(18\sqrt{81-72.25} - 3\cdot 8.5^2 + 162\right) < 0$$

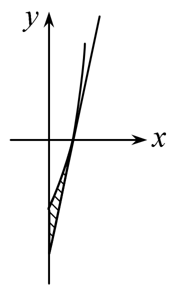
פונקציית המטרה מקבלת ערך מקסימלי עבור: $R = 6\sqrt{2}$ ס"מ

*המשך בעמוד הבא* ◄◄◄

הערך המקסימלי הוא:

$$V_{max} = V\left(6\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{3}\cdot 72\left(9+\sqrt{81-72}\right) = 24\pi(9+3) = 288\pi \text{ סמ"ק}$$

**(8)**




$x \neq -3$

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{2x^3+4x-6} & \\ \hline 2x^4+6x^3+4x^2+6x-18 & x+3 \\ -\underline{2x^4+6x^3\phantom{+4x^2+6x-18}} & \\ 4x^2+16x-18 & \\ -\underline{4x^2+12x\phantom{-18}} & \\ -6x-18 & \\ -\underline{-6x-18} & \\ 0 & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{2x^4+6x^3+4x^2+6x-18}{x+3} = 2x^3+4x-6$$

שיעורי נקודת ההשקה: $f(1) = 2+4-6 = 0 \quad\Rightarrow\quad (1,0)$

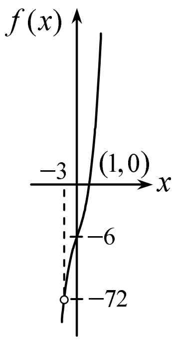
(א) $f'(x) = 6x^2+4$

$m_{\text{משיק}} = f'(1) = 6\cdot 1^2+4 = 10$

משוואת המשיק: $y = 10(x-1) = 10x-10$

$$S = \int_0^1 (2x^3+4x-6-10x+10)\,dx = \int_0^1 (2x^3-6x+4)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{2}-3x^2+4x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}-3+4-(0-0+0) = 1.5 \text{ יחידות שטח}$$




(ב) ( $i$ ) לכל $x$: $f'(x) = 6x^2+4 > 0$ ,

כלומר הפונקציה עולה עבור $x > -3$ , $x < -3$ .

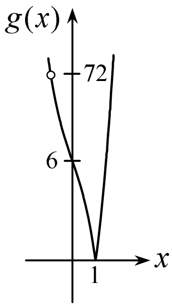
אין תחומי ירידה, אין נקודות קיצון.

( $ii$ ) $\lim\limits_{x\to -3}(2x^3+4x-6) = -72$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

ג) $g(x)=\left|f(x)\right| \Rightarrow \begin{cases} f(x)\ ,\ f(x)\geq 0 \\ -f(x)\ ,\ f(x)<0 \end{cases}$

כלומר, כדי לבנות את גרף הפונקציה $g(x)$
יש להשאיר את החלק החיובי של הגרף של $f(x)$,
ואת החלק השלילי יש לשקף על ציר ה- $x$.
כך שמתקבל הגרף משמאל:




**(9)** $f(x)=\frac{\sqrt{x-\text{a}}}{\text{c}x^2}\ ,\ f(8)=\frac{\sqrt{2}}{8}\ ,\ f'(8)=0$

א) $f'(x)=\frac{1}{\text{c}}\cdot\frac{\frac{x^2}{2\sqrt{x-\text{a}}}-2x\sqrt{x-\text{a}}}{x^4}=\frac{1}{\text{c}}\cdot\frac{x^2-4x^2+4\text{a}x}{2x^4\sqrt{x-\text{a}}}=\frac{4\text{a}-3x}{2\text{c}x^3\sqrt{x-\text{a}}}$

$f(8)=\frac{\sqrt{2}}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{8-\text{a}}}{64\text{c}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$

$f'(8)=0 \Rightarrow \frac{4\text{a}-24}{2\text{c}\cdot 8^3\sqrt{8-\text{a}}}=0 \Rightarrow 4\text{a}-24=0 \Rightarrow \text{a}=6$

$\frac{\sqrt{8-6}}{8\text{c}}=\sqrt{2} \Rightarrow 8\text{c}=1 \Rightarrow \text{c}=\frac{1}{8}$

$f'(x)=\frac{4(24-3x)}{x^3\sqrt{x-6}}\ ,\ f(x)=\frac{8\sqrt{x-6}}{x^2}$

ב) תחום ההגדרה: $\begin{cases} x-6\geq 0 \\ x^2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 6 \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow x\geq 6$

ג) $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{12(8-x)}{x^3\sqrt{x-6}}=0 \Rightarrow 12(8-x)=0 \Rightarrow x=8$

מתאים לנקודה N, לגרף הפונקציה אין נקודות קיצון פנימיות נוספות (חוץ מ- N).

נקודות קצה: $x=6 \Rightarrow f(6)=0$

כלומר $(6,0)$ נקודת מינימום מוחלט (כי $f(x)\geq 0$ לכל $x\geq 6$).

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ד) משוואות האסימפטוטות :

אסימפטוטות אנכיות :

$x = 0$ לא בתחום ההגדרה, לכן אין אסימפטוטות אנכיות.

אסימפטוטות אופקיות :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{8\sqrt{x-6}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8\sqrt{\frac{1}{x^3}-\frac{6}{x^4}}}{1} = 0 \ \Rightarrow \ y = 0$$

(ה) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ :

$x = 0$ לא שייך לתחום ההגדרה, לכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$ .

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ :

$$y = 0 \ \Rightarrow \ \frac{8\sqrt{x-6}}{x^2} = 0 \ \Rightarrow \ \sqrt{x-6} = 0 \ \Rightarrow \ x = 6 \ \Rightarrow \ (6,0)$$

(ו)