

### פתרונות מבחון מס' 3 (ספר לימוד – שאלון 035806)

(1) נסמן ב-  $x$  שעות את הזמן שבו צינור I יכול למלא את הבריכה לבדו.  
וב-  $y$  שעות את הזמן שבו צינור II יכול למלא את הבריכה לבדו.

מכאן, בשעה אחת, צינור I ממלא  $\frac{1}{x}$  של הבריכה  
וצינור II ממלא  $\frac{1}{y}$  של הבריכה.

(א) (i) לפני נתוני השאלה ניתן להרכיב את המשוואה:

$$\begin{cases} 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = m \end{cases}$$

ב- 4 שעות שני הצינורות יחד ממלאים את כל הבריכה  
כל צינור ממלא ששית בריכה, זה אחר זה,  
והם עובדים יחד בסך הכל  $m$  שעות.

$$\begin{aligned} y &= 6m - x \Rightarrow \frac{4}{x} + \frac{4}{6m-x} = 1 \\ 24m - 4x + 4x &= 6mx - x^2 \Rightarrow x^2 - 6mx + 24m = 0 \\ x_{1,2} &= \frac{6m \pm \sqrt{36m^2 - 96m}}{2} = 3m \pm \sqrt{9m^2 - 24m} \end{aligned}$$

(ii) כדי שלבעיה יהיה פתרון ייחודי, נדרש:

$$\Delta = 0 \Rightarrow x = y = 3m > 0 \Rightarrow 9m^2 - 24m = 0$$

$$3m(3m - 8) = 0 \Rightarrow m_1 = 0, m_2 = 2\frac{2}{3}$$

$m$  הוא גודל חיובי, לכן:  $m = 2\frac{2}{3}$

$$\frac{3}{x} = 1 - 0.4 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow 3m \pm \sqrt{9m^2 - 24m} = 5 \quad (\text{ב})$$

$$\sqrt{9m^2 - 24m} = \pm(5 - 3m)$$

$$m > \frac{5}{3} \Rightarrow \sqrt{9m^2 - 24m} = -(5 - 3m)$$

$$m \leq \frac{5}{3} \Rightarrow \sqrt{9m^2 - 24m} = +(5 - 3m)$$

בשני המקרים, שני אגפי המשוואות הם חיוביים, לכן:

$$9m^2 - 24m = (5 - 3m)^2 \Rightarrow 9m^2 - 24m = 25 - 30m + 9m^2$$

$$6m = 25 \Rightarrow m = \frac{25}{6}$$

$$\frac{1}{a_3 a_4} = \frac{1}{a_1 a_5} + \frac{2}{a_2 a_3} \Rightarrow \frac{1}{a_1 \cdot q^2 \cdot a_1 \cdot q^3} = \frac{1}{a_1 \cdot a_1 \cdot q^4} + \frac{2}{a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{a_1^2 \cdot q^5} = \frac{1}{a_1^2 \cdot q^4} + \frac{2}{a_1^2 \cdot q^3} / \cdot a_1^2 q^5 \neq 0$$

$$1 = q + 2q^2 \Rightarrow 2q^2 + q - 1 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = -1$$

$$\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ a_7 = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{8} \Rightarrow a_1 = 8 \quad \text{אפשרות } \textcircled{1}$$

$$S_6 = 8 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 8 \cdot \frac{63}{32} = 15 \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} q = -1 \\ a_7 = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow S_6 = \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} = 0 \quad \text{אפשרות } \textcircled{2}$$

(3) נתון ש-  $B, A \cup C$  שלושה מאורעות זרים המקיימים :

$P(B) = 0.4, P(C) = 0.3, P(D/A) = 0.6$  בנוסף נתון כי :

$P(\bar{D}/C) = 0.4, P(B/\bar{D}) = 0.2$

כדי להיעזר בטבלה ההסתברויות הבאה :

סה"כ	C	B	A	
0.7	0.18	0.34	0.18	D
0.3	0.12	0.06	0.12	$\bar{D}$
1	0.3	0.4	0.3	סה"כ

סביר את מילוי הастברויות שאינן ידועות ישירות מהנתונים.

מכיוון ש-  $B, A \cup C$  מאורעות זרים, ו-  $P(A \cup B \cup C) = 1$

$$\text{הרי ש- } P(A) = 1 - 0.3 - 0.4 = 0.3$$

$$P(D/A) = 0.6 \Rightarrow \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = 0.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap D) = 0.6 \cdot P(A) = 0.18$$

המשך בעמוד הבא ▶◀

$$P(A \cap \bar{D}) = P(A) - P(A \cap D) = 0.3 - 0.18 = 0.12$$

$$P(\bar{D} / C) = 0.4 \Rightarrow \frac{P(C \cap \bar{D})}{P(C)} = 0.4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(C \cap \bar{D}) = 0.4 \cdot P(C) = 0.12$$

$$P(C \cap D) = P(C) - P(C \cap \bar{D}) = 0.3 - 0.12 = 0.18$$

$$P(B / \bar{D}) = 0.2 \Rightarrow \frac{P(B \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = 0.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B \cap \bar{D}) = 0.2 \cdot P(\bar{D})$$

$$\text{נסמן } x \text{ ו אז } , P(\bar{D}) = 0.2x$$

$$P(\bar{D}) = P(A \cap \bar{D}) + P(B \cap \bar{D}) + P(C \cap \bar{D}) \quad \text{ניעזר בקשר :}$$

$$x = 0.12 + 0.2x + 0.12 \Rightarrow x = 0.3 \quad \text{ונקבל :}$$

$$\text{כלומר : } P(\bar{D}) = 0.3 , P(B \cap \bar{D}) = 0.06$$

$$\text{מכאן גם : } P(B) = 1 - 0.3 = 0.7 \text{ ו אז :}$$

$$P(B \cap D) = P(B) - P(B \cap \bar{D}) = 0.4 - 0.06 = 0.34$$

$$\text{(א) כאמור : } P(\bar{D}) = 0.3$$

$$\text{, } P(A / D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.18}{0.7} \text{ : גם } P(C / D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0.18}{0.7} \quad \text{(ב)}$$

$$\text{לכן : } P(C / D) = P(A / D)$$

$$P(D / C) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{0.18}{0.3} = 0.6$$

$$\text{וגם : } P(D / A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{0.18}{0.3} = 0.6$$

$$\text{לכן : } P(D / C) = P(D / A)$$

$$P((A \cup C) / \bar{D}) = \frac{P((A \cup C) \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} \quad \text{(ג)}$$

מכיוון ש-  $C$  ו-  $A$  מאורעות זרים, הרי ש :

$$P((A \cup C) / \bar{D}) = \frac{P(A \cap \bar{D}) + P(C \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{0.12 + 0.12}{0.3} = \frac{0.24}{0.3} = 0.8$$

(4) נסמן:  $AD = DB = \frac{1}{2}a$ ,  $AE = \frac{2}{3}a$ ,  $EC = \frac{1}{3}a$  ואז:  $AB = AC = a$

$$\text{DE} \parallel KC \quad (\text{נתון}) \quad (a)$$



$$\frac{AD}{DK} = \frac{AE}{EC} \quad (\text{לפי משפט תאלס})$$



$$\frac{\frac{1}{2}a}{DK} = \frac{2}{1}$$



$$DK = \frac{1}{4}a$$

$$KB = AB - AD - DK \quad (\text{חישור קטועים})$$

$$KB = a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}a$$



$$KB = KD \quad (\text{הצבה})$$

(ב)  $KC$  הוא קטע אמצעים ב-  $\Delta BDF$  (קטע החוצה צלע אחת במשולש

.  $BC = CF$  ומקביל לצלע שנייה הוא קטע אמצעים). לכן:

(ג) + (ד)

ב-  $AC$  ו-  $FD$  הם תיכונים (נתון + הוכחנו בסעיף (ב)).

לכן הנקודה  $E$  היא נקודת מפגש התיכונים ב-  $\Delta ABF$ ,

ו-  $BH$  הוא גם תיכון (כל שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת),

לכן:  $AH = HF$ .

$$CK \parallel FD \quad (\text{נתון})$$

$$CM \parallel FE$$

$$BC = CF \quad (\text{הוכחנו בסעיף (ב)}).$$



$$\Delta BEF \text{ קטע אמצעים ב- } CM$$



**המשך בעמוד הבא ▶▶**

(קטע אמצעים במשולש הוא קטע המחבר  $BM = ME$

את אמצעי שתי צלעות במשולש)

E נקודת מפגש התיכוןים ב-  $\Delta ABF$  (הוכחנו)



$$\text{תיכונים במשולש נפגשים בנקודת אחת} \quad \frac{BE}{EH} = \frac{2}{1}$$

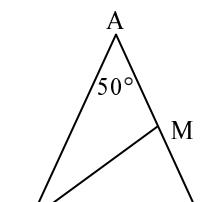
ומתחלקים בנקודה זו ביחס 1:2

כך שהקטע הגדל צמוד לקדקוד)

$$, BM = ME = t , BE = 2t , EH = t \text{ : נסמן :}$$

כלומר :  $BM = ME = EH$

(5) שאלות המשלבות גיאומטריה + טריגונומטריה הורדו מתוכנית הלימודים.



(6) (א) ב-  $\Delta ABM$  נסמן :

$$\angle AMB = \alpha , AB = 2b , AM = b$$

לפי משפט הסינוסים :

$$\frac{AM}{\sin \angle B} = \frac{AB}{\sin \angle M} \Rightarrow \frac{b}{\sin(130^\circ - \alpha)} = \frac{2b}{\sin \alpha} \Rightarrow 2 \sin(130^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$2(\sin 130^\circ \cos \alpha - \sin \alpha \cos 130^\circ) = \sin \alpha$$

$$1.5321 \cos \alpha + 1.2856 \sin \alpha = \sin \alpha$$

$$0.2856 \sin \alpha = -1.5321 \cos \alpha / : 0.2856 \cos \alpha \neq 0$$

$$\tan \alpha = -5.3645 \Rightarrow \alpha \approx 100.56^\circ$$

$$\angle BMC = 180^\circ - \angle AMB = 180^\circ - 100.56^\circ = 79.44^\circ$$

(ב) סכום הזווויות ב-  $\Delta ABC$  שווה ל-  $180^\circ$ , לכן :

$$\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = 2R$$

לפי משפט הסינוסים ב-  $\Delta ABC$  :

**המשך בעמוד הבא** <<

$$AB = 2R \sin \angle C = 2 \cdot 10 \cdot \sin 65^\circ \approx 18.126$$

$$AM = MC = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 18.126 = 9.063$$

נתון :  $\angle BMC = 79.44^\circ$  ,  $\angle C = 65^\circ$  ,  $r_{\Delta ABD} = 14$  ס"מ

$$\angle DBC = 180^\circ - 65^\circ - 79.44^\circ = 35.56^\circ$$

$$\angle DBA = \angle B - \angle DBC = 65^\circ - 35.56^\circ = 29.44^\circ$$

$$\frac{AD}{\sin \angle DBA} = 2r \quad \text{לפי משפט הסינוסים ב- } \Delta ABD$$

$$AD = 2r \sin \angle DBA = 2 \cdot 14 \cdot \sin 29.44^\circ \text{ ס"מ } 13.762$$

$$\angle AMD = \angle BMC = 79.44^\circ$$

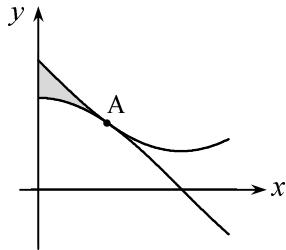
$$\frac{AD}{\sin \angle M} = \frac{AM}{\sin \angle D} \quad \text{לפי משפט הסינוסים ב- } \Delta AMD$$

$$\sin \angle D = \frac{AM \cdot \sin \angle M}{AD} = \frac{9.063 \cdot \sin 79.44^\circ}{13.762} = 0.6474$$

$$\angle ADM = 40.346^\circ$$

$$\angle MAD = 180^\circ - 79.44^\circ - 40.346^\circ = 60.214^\circ$$

$$S_{\Delta AMD} = \frac{AM \cdot AD}{2} \cdot \sin \angle MAD = \frac{9.063 \cdot 13.762}{2} \cdot \sin 60.214 \approx 54.12 \text{ סמ"ר}$$



.  $f(x) = a - \sin x$  ,  $g(x) = \cos x$  (7) נתון :  $x$  נסמן את נקודת ההשקה ב- A ו אז :

$$\begin{cases} f(x_A) = g(x_A) \\ f'(x_A) = g'(x_A) \end{cases}$$

$$f'(x) = -\cos x$$

$$g'(x) = -\sin x$$

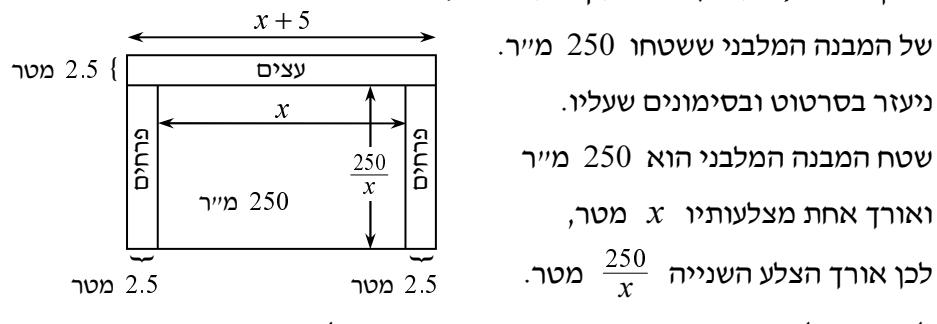
$$f'(x) = g'(x) \Rightarrow -\cos x = -\sin x \Rightarrow \tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n , n \in \mathbb{Z}$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$\begin{aligned}
 x_A &= \frac{\pi}{4} \Rightarrow y_A = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} && \text{בתחום הנ吐ן :} \\
 f(x_A) &= g(x_A) \Rightarrow a - \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} && \text{ואז :} \\
 a - \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} \\
 S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2} - \sin x - \cos x) dx = \left( \sqrt{2}x + \cos x - \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = && \text{(ב)} \\
 &= \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - (0 + 1 - 0) = \\
 &= \left( \frac{\pi \sqrt{2}}{4} - 1 \right) \approx 0.111 \quad \text{יחידות שטח}
 \end{aligned}$$

(8) נסמן ב-  $a$  (מטרים) את אורך אחת הצלעות



לפנינו שאלת מינימום שבה פונקציית המטרה היא עלות הגינון.

נסמן ב-  $a$  ש"ח את מחיר מ"ר גינון בפרחים, ואז מחיר מ"ר גינון בעצים  
הוא 1.25a ש"ח.

$$f(x) = a \cdot 2.5 \cdot \frac{250}{x} \cdot 2 + 1.25a \cdot 2.5(x+5)$$

עלות גינון 2 חלקי הפערים

עלות הגינון

$$f(x) = \frac{1250a}{x} + 3.125ax + 15.625a$$

$$f'(x) = -\frac{1250a}{x^2} + 3.125a$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1250a}{x^2} + 3.125a = 0 / \cdot \frac{x^2}{a}$$

**המשך בעמוד הבא**

$$-1,250 + 3.125x^2 = 0 \Rightarrow x = 20$$

(הפתרון  $x = -20$  נפסל).

$$f''(x) = \frac{1,250a \cdot 2}{x^3}$$

לקביעת סוג הקיצון:

$$f''(20) > 0 \Rightarrow \min$$

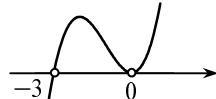
נשאלו מה צריך להיות אורך חזית החלקה והוא מסומן על ידי  $5 + x$  מטרים.

**תשובה:** כדי שעלות הגינון תהיה מינימלית, אורך חזית החלקה

חייב להיות 25 מטר.

(א) תחום ההגדרה של הנגזרת:

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 \geq 0 \\ \sqrt{x^3 + 3x^2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2(x+3) > 0$$



. תחום ההגדרה:  $-3 < x < 0, x > 0$

(ב) משוואת אסימפטוטה אנכית:

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{9x^2 + 18x}{\sqrt{x^3 + 3x^2}} = \frac{81 - 54}{\sqrt{-27 + 27}} = \frac{27}{0^+} = \infty \Rightarrow x = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9x^2 + 18x}{\sqrt{x^3 + 3x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9x(x+2)}{|x|\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9x(x+2)}{x\sqrt{x+3}} = \frac{9 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{9x^2 + 18x}{\sqrt{x^3 + 3x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{9x(x+2)}{|x|\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{9x(x+2)}{-x\sqrt{x+3}} = \frac{9 \cdot 2}{-\sqrt{3}} = -6\sqrt{3}$$

כלומר בנקודת שבה  $x = 0$  לגרף פונקציית הנגזרת אין אסימפטוטה.

(א) לפונקציה יש נקודות קיצון כאשר  $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{9x^2 + 18x}{\sqrt{x^3 + 3x^2}} = 0 \Rightarrow 9x(x+2) = 0$$

אין שיק לתחום ההגדרה

$x_2 = -2$

$$f'(-3 < x < -2) > 0$$

לפי גראף פונקציית הנגזרת (b) :

המשך בעמוד הבא ►►

$$f'(-2 < x < 0) < 0$$

לכן בנקודה  $x = -2$  יש לפונקציה  $f(x)$  נקודת מקסימום.

(ד) לפי גורף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  ולפי סעיף (א) בו מצאנו  $0$

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ עולה}$$

$$-2 < x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ יורדת}$$

$$-3 \leq x < -2 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ עולה}$$

$$S_{\text{גפ}} = - \int_{-2}^a f'(x) dx \Rightarrow 12 - 6\sqrt{2} = -[f(x)]_{-2}^a \quad (7)$$

$$12 - 6\sqrt{2} = f(-2) - f(a)$$

$$12 - 6\sqrt{2} = f(-2) - 6\sqrt{2} + 6$$

$$f(-2) = 6$$

