פתרון מבחן מס' 4 (ספר לימוד – שאלון 035805)

(1) (א) נתון: $a_5 = 7a_1$, כלומר $a_1 + 4d = 7a_1$. מכאן נקבל: $d = 1.5a_1$.

נתון גם כי: a_1 , a_3 , a_{11} הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית, כלומר הסדרה ההנדסית היא:

$$a_1 \ , \ a_1 + 2d \ , \ a_1 + 10d \ , \ \dots$$

או

$$a_1 \ , \ a_1 + 2 \cdot 1.5a_1 \ , \ a_1 + 10 \cdot 1.5a_1 \ , \ \dots$$

כלומר:

$$a_1 \ , \ 4a_1 \ , \ 16a_1 \ , \ \dots$$

ואז נקבל כי $q = 4$.

(ב) האיבר הרביעי בסדרה ההנדסית הוא $a_1 \cdot 4^3 = 64a_1$.

נסמן ב- n את מקומו של איבר זה בסדרה החשבונית, ואז:

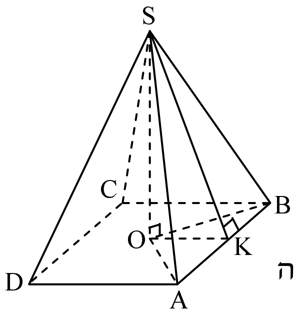
$$64a_1 = a_1 + (n-1)d$$

נציב $d = 1.5a_1$ ונקבל:

$$63a_1 = (n-1)1.5a_1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{63}{1.5} + 1 = 43$$

תשובה: האיבר במקום ה- 43 בסדרה החשבונית הוא האיבר הרביעי בסדרה ההנדסית.

(2) נתון: $AB = BC = CD = AD = 8$ ס"מ .



SO מאונך למישור $ABCD$, לכן BO הוא ההיטל של המקצוע SB על המישור $ABCD$

ו- $\angle SBO = 52°$.

אלכסוני ריבוע $ABCD$ שווים זה לזה, חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה, לכן: $AO = BO$.

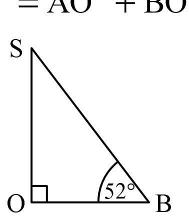
לפי משפט פיתגורס ב- ΔAOB :

$$AB^2 = AO^2 + BO^2$$

$$8^2 = AO^2 + BO^2 \quad \Rightarrow \quad BO^2 = 32 \quad \Rightarrow \quad BO = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ ס"מ}$$

ב- ΔOBS :

$$\tan 52° = \frac{SO}{BO}$$



כלומר:

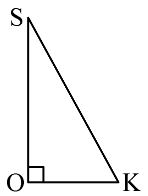
$$SO = 4\sqrt{2}\tan 52° \approx 7.24 \text{ ס"מ}$$

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

נעביר $SK \perp AB$. SK הוא גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים SAB ,

ולכן הוא גם תיכון לבסיס AB .

לפי משפט פיתגורס ב- ΔSOK :



$$SK^2 = SO^2 + KO^2$$

$$SK^2 = 7.24^2 + 4^2 = 68.4176$$

$$SK = \sqrt{68.4176} \approx 8.2715 \text{ ס"מ}$$

$$P_{ABCD} = S_{\text{בסיס}} + 4 \cdot S_{\Delta SAB} = 8^2 + 4 \cdot \frac{AB \cdot SK}{2} =$$

$$= 64 + 2 \cdot 8 \cdot 8.2715 = 196.344 \text{ סמ"ר}$$

(3) (א) תחום ההגדרה של $f(x)$: $x > 0$.

נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

$$y = 0 \Rightarrow (\ln x)^m - (\ln x)^{m-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\ln x)^{m-1}(\ln x - 1) = 0$$

$(\ln x)^{m-1} = 0$ או $\ln x = 1$

$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$; $x = e$

כלומר: $(1,0)$; $(e,0)$

$$f'(x) = m(\ln x)^{m-1} \cdot \frac{1}{x} - (m-1) \cdot (\ln x)^{m-2} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{(\ln x)^{m-2}}{x} \cdot (m \ln x - m + 1)$$

$$f'(1) = \frac{0}{1} \cdot (0 - m + 1) = 0$$

$$f'(e) = \frac{1}{e} \cdot (m \cdot 1 - m + 1) = \frac{1}{e}$$

משוואת המשיק בנקודה $(1,0)$: $y - 0 = 0(x-1) \Rightarrow y = 0$

משוואת המשיק בנקודה $(e,0)$: $y - 0 = \frac{1}{e}(x - e) \Rightarrow y = \frac{1}{e}x - 1$

(ב) עבור $m = 3$ מתקבל: $f(x) = (\ln x)^3 - (\ln x)^2$

עבור $m = 5$ מתקבל: $f(x) = (\ln x)^5 - (\ln x)^4$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

כלומר מתקיים:

$$\ln^3 x - \ln^2 x = \ln^5 x - \ln^4 x$$

$$\ln^2 x(\ln x - 1) = \ln^4 x(\ln x - 1)$$

$$(\ln x - 1)(\ln^4 x - \ln^2 x) = 0$$

$$\ln x = 1 \quad \text{או} \quad \ln^2 x \cdot (\ln^2 x - 1) = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$x = e \qquad \ln x = 0 \qquad \ln x = \pm 1$$

$$x_3 = 1 \qquad x_1 = e \ , \ x_2 = \frac{1}{e}$$

$$f(1) = f(e) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = -1 - 1 = -2$$

כלומר, נקודות החיתוך: $\left(1,0\right)$, $\left(e,0\right)$, $\left(\frac{1}{e},-2\right)$.

(4) נבדוק את נכונות הטענה על-ידי אימות אינטגרל על-ידי גזירה (בעזרת הפעולה ההפוכה):

$$(x + \sin x \cdot \sin 2x + \text{c})' = 1 + \cos x \cdot \sin 2x + \sin x \cdot 2\cos 2x =$$

$$= 1 + \cos x \cdot 2\sin x \cos x + 2\sin x(1 - 2\sin^2 x) =$$

$$= 1 + 2\sin x(\cos^2 x + 1 - 2\sin^2 x) =$$

$$= 1 + 2\sin x(1 - \sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x) =$$

$$= 1 + 2\sin x(2 - 3\sin^2 x) = 1 + 4\sin x - 6\sin^3 x$$

כלומר, הטענה הנתונה בשאלה היא טענה נכונה.

נתון כי $f(x) > 0$ לכל $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

לכן גרף הפונקציה נמצא כולו מעל ציר ה- x בתחום זה, ואז:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 4\sin x - 6\sin^3 x)\,dx = (x + \sin x \sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{2} - (0 + \sin 0 \cdot \sin 0) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1.4925 \text{ יחידות שטח}$$

(5) (א) נתון: $y'(1)=0$, $y'(2)=12e^{-2}$.

$$y'=\mathrm{a}e^{-\mathrm{k}x^2}+\mathrm{a}x\cdot e^{-\mathrm{k}x^2}\cdot(-2\mathrm{k}x)=\mathrm{a}e^{-\mathrm{k}x^2}(1-2\mathrm{k}x^2)$$

$$y'(1)=0 \;\Rightarrow\; 0=\mathrm{a}e^{-\mathrm{k}}(1-2\mathrm{k})$$

מכיוון ש- $\mathrm{a}\neq 0$ וגם $e^{-\mathrm{k}}>0$ לכל x , הרי שמתקיים:

$$0=1-2\mathrm{k} \;\Rightarrow\; \mathrm{k}=\tfrac{1}{2}$$

$$y'(2)=12e^{-2} \;\Rightarrow\; 12e^{-2}=\mathrm{a}e^{-\frac{1}{2}\cdot 2^2}(1-2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 2^2)$$

$$12e^{-2}=\mathrm{a}e^{-2}(-3)$$

כלומר:

$$12=-3\mathrm{a} \;\Rightarrow\; \mathrm{a}=-4$$

(ב) $y=-4xe^{-\frac{1}{2}x^2}$. תחום הגדרה: כל x .

(ג)

$$x=0 \;\Rightarrow\; y=0 \;\Rightarrow\; (0,0)$$

$$y=0 \;\Rightarrow\; 0=-4xe^{-\frac{1}{2}x^2} \;\Rightarrow\; 0=-4x \;\Rightarrow\; x=0$$

כלומר נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים: $(0,0)$.

(ד) נמצא את נקודות הקיצון של הפונקציה:

$$y'=0 \;\Rightarrow\; 0=-4e^{-\frac{1}{2}x^2}(1-x^2) \;\Rightarrow\; 1-x^2=0 \;\Rightarrow\; x=\pm 1$$

$$y(-1)=-4\cdot(-1)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2} \;,\; y(1)=-4\cdot 1\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 1^2}$$

כלומר הנקודות החשודות לקיצון: $\left(1,-4e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $\left(-1,4e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

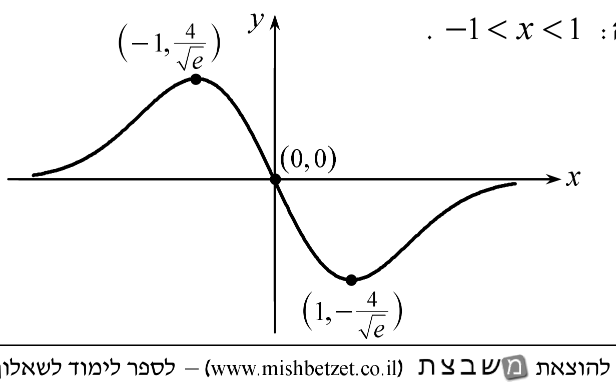
מכיוון שהפונקציה רציפה בתחום הנתון, ניתן לקבוע:

$$\min : x=1$$
$$\max : x=-1$$

ואז תחומי עלייה: $x>1$, $x<-1$,

תחום ירידה: $-1<x<1$.

(ה)



גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929