פתרון מבחן מס' 6 (ספר לימוד – שאלון 035804)

09-05-2017

(1) נסמן ב- x (קמ"ש) את מהירות זרם המים בנהר.

נסמן ב- y (קמ"ש) את מהירות הסירה במים עומדים.

	מהירות (בקמ"ש)	זמן (בשעות)	דרך (בק"מ)
לעבור את המרחק שבין שתי הנקודות עם הזרם	$y+x$	$\frac{48}{y+x}$	48
לעבור את המרחק שבין שתי הנקודות נגד הזרם	$y-x$	$\frac{48}{y-x}$	48
לעבור 4 ק"מ עם הזרם	$y+x$	$\frac{4}{y+x}$	4
לעבור 3 ק"מ נגד הזרם	$y-x$	$\frac{3}{y-x}$	3

מהנתונים בשאלה נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \frac{48}{y+x}+\frac{48}{y-x}=14 \\ \frac{4}{y+x}=\frac{3}{y-x} \quad \Rightarrow \quad 4y-4x=3y+3x \quad \Rightarrow \quad y=7x \end{cases}$$

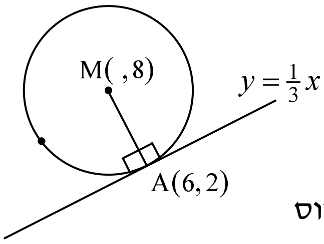
נציב $7x$ במקום y במשוואה הראשונה ונקבל:

$$\frac{48}{8x}+\frac{48}{6x}=14 \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{x}+\frac{8}{x}=14 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

תשובה: מהירות הזרם בנהר 1 קמ"ש,

מהירות הסירה במים עומדים 7 קמ"ש.

(2) נוסיף סרטוט ונעלה עליו את הנתונים שבשאלה (לא במערכת צירים).



(א) נמצא את משוואת AM.

השיפוע של המשיק הוא $\frac{1}{3}$ ולכן שיפוע הרדיוס AM הוא -3 (משיק מאונך לרדיוס בקצהו ומכפלת שיפועי ישרים מאונכים שווה ל- -1).

כלומר משוואת AM :
$$y-y_A=m_{AM}(x-x_A)$$
$$y-2=-3(x-6) \quad \Rightarrow \quad y=-3x+20$$

הנקודה M נמצאת על הישר AM , כלומר מקיימת את משוואת AM :
$$8=-3x+20 \quad \Rightarrow \quad 3x=20-8 \quad \Rightarrow \quad 3x=12 \quad \Rightarrow \quad x=4$$

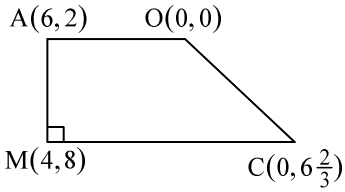
כלומר, $M(4,8)$.

נמצא את רדיוס המעגל:
$$AM=\sqrt{(x_A-x_M)^2+(y_A-y_M)^2}$$
$$R=AM=\sqrt{(6-4)^2+(2-8)^2}=\sqrt{40}$$

משוואת המעגל: $(x-4)^2+(y-8)^2=40$.

(ב) כדי להראות שמרובע AMCO הוא טרפז ישר-זווית,

נמצא את שיפועי הצלעות AM , MC , AO ו- OC ונקבל:



$$m_{AM}=\frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\frac{8-2}{4-6}=-3$$
$$m_{MC}=\frac{y_C-y_M}{x_C-x_M}=\frac{6\frac{2}{3}-8}{0-4}=\frac{-\frac{4}{3}}{-4}=\frac{1}{3}$$
$$m_{AO}=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{2-0}{6-0}=\frac{1}{3}$$
$$m_{OC}=\frac{y_C-y_O}{x_C-x_O}=\frac{6\frac{2}{3}-0}{0-0} \quad \Rightarrow$$ לא מוגדר

(OC מתלכד עם ציר ה- y).

$$m_{MC}=m_{AO} \quad \Rightarrow \quad MC \parallel AO$$
$$m_{AM}\neq m_{OC} \quad \Rightarrow \quad AM \nparallel OC$$
$$m_{AM}\cdot m_{MC}=m_{AM}\cdot m_{AC}=-3\cdot\frac{1}{3}=-1$$

לכן: $MC\perp AM$, $AC\perp AM$.

מסקנה: מרובע AMCO הוא טרפז ישר-זווית.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

נחשב את אורכי הקטעים AO , MC ו- AM :

$$AO=\sqrt{(x_A-x_O)^2+(y_A-y_O)^2}=$$
$$=\sqrt{(6-0)^2+(2-0)^2}= \text{יחידות אורך } \sqrt{40}$$
$$MC=\sqrt{(x_C-x_M)^2+(y_C-y_M)^2}=$$
$$=\sqrt{(0-4)^2+(6\tfrac{2}{3}-8)^2}=\sqrt{\frac{160}{9}}= \text{יחידות אורך } \frac{\sqrt{160}}{3}$$
$$AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}=$$
$$=\sqrt{(4-6)^2+(8-2)^2}= \text{יחידות אורך } \sqrt{40}$$

נקבל ששטח הטרפז:
$$S_{\text{טרפז}}=\frac{(AO+MC)\,AM}{2}=\frac{\left(\sqrt{40}+\sqrt{\frac{160}{9}}\right)\sqrt{40}}{2}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{40}+\frac{\sqrt{160}}{3}\right)\cdot\sqrt{40}}{2}=\frac{40+\frac{80}{3}}{2}=\frac{160}{3}= \text{יחידות שטח } 33\tfrac{1}{3}$$

(3) נתון:
$$P(\bar{A})=0.3$$
$$P(B/A)=0.9$$
$$P(\bar{A}/\bar{B})=\tfrac{12}{19}$$

	$\bar{B}$	B	
0.7	0.07	0.63	A
0.3	**0.12**	0.18	$\bar{A}$
1	0.19	0.81	

(א)
$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-0.3=0.7$$
$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\ \Rightarrow\ 0.9=\frac{P(A\cap B)}{0.7}\ \Rightarrow\ P(A\cap B)=0.63$$
$$P(\bar{B}\cap A)=P(A)-P(A\cap B)=0.7-0.63=0.07$$

נסמן: $P(\bar{A}\cap\bar{B})=x$, ואז:
$$P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})-P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.3-x$$
$$P(\bar{B})=P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.07+x$$

לפי הנתון:
$$P(\bar{A}/\bar{B})=\tfrac{12}{19}\ \Rightarrow\ \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\tfrac{12}{19}\ \Rightarrow\ \frac{x}{0.07+x}=\frac{12}{19}$$
$$19x=0.84+12x\ \Rightarrow\ 7x=0.84\ \Rightarrow\ x=0.12$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

נמלא את מה שמצאנו בטבלה למעלה ונקבל:

$$P(A \cap \bar{B}) = 0.07 \ , \ P(\bar{B}) = 0.19$$

ב) $P(\text{הצלחה לפחות באחת הבחינות}) = P(A \cup B) =$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.81 - 0.63 = 0.88$$

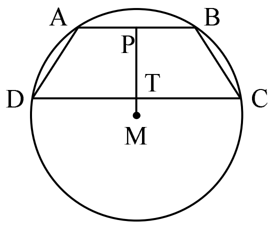
אפשר לחשב גם כך:

$$P(\text{הצלחה לפחות באחת הבחינות}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0.12 = 0.88$$

(4) נתון: $AB \parallel DC$, $AB = 9$ ס״מ , $CD = 21$ ס״מ .

בניית עזר: קטע PM כך ש- $PM \perp AB$,

מתקיים גם: $PM \perp DC$ (מכיוון ש- $AB \parallel DC$ ו- $PM \perp AB$).



רדיוס המאונך למיתר חוצה את המיתר, לכן:

$$DT = TC = \frac{21}{2} = 10.5 \text{ ס״מ}$$

$$AP = PB = \frac{9}{2} = 4.5 \text{ ס״מ}$$

א) (*i*) נתבונן ב- ΔMPB . לפי משפט פיתגורס:

$$PM^2 + 4.5^2 = R^2 \ \Rightarrow \ PM = \sqrt{R^2 - 20.25}$$

(*ii*) נתבונן ב- ΔMTC . לפי משפט פיתגורס:

$$MT^2 + 10.5^2 = R^2 \ \Rightarrow \ MT = \sqrt{R^2 - 110.25}$$

ב) נתון: $PT = 8$ ס״מ , כלומר: $PM - MT = 8$

נציב את הביטויים שקיבלנו בסעיף (א) ונקבל:

$$\sqrt{R^2 - 20.25} - \sqrt{R^2 - 110.25} = 8$$

$$\sqrt{R^2 - 20.25} = 8 + \sqrt{R^2 - 110.25}$$

שני האגפים של המשוואה חיוביים, לכן ניתן להעלות בריבוע את שניהם.

$$R^2 - 20.25 = 64 + 16\sqrt{R^2 - 110.25} + R^2 - 110.25$$

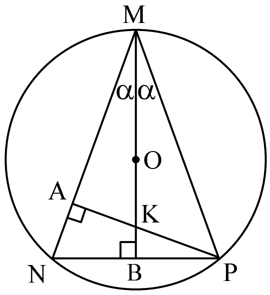
$$26 = 16\sqrt{R^2 - 110.25} \ \Rightarrow \ 13 = 8\sqrt{R^2 - 110.25}$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

נעלה בריבוע את שני האגפים ונקבל: $169 = 64 \cdot (R^2 - 110.25)$

$169 = 64R^2 - 7056 \Rightarrow 64R^2 = 7225 \Rightarrow R = \frac{85}{8} =$ 10.625 ס"מ

(הפתרון $R = -10.625$ מתבטל כי $R > 0$).



(5) $MN = NP$, $\sphericalangle MNP = 2\alpha$, $(\alpha < 30°)$

$MB \perp NP$, $PA \perp MN$

במשולש שווה-שוקיים, הגובה לבסיס (MB)

הוא גם תיכון לבסיס וגם חוצה-זווית הראש.

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$NB = BP = \frac{1}{2} NP$ $\sphericalangle NMB = \sphericalangle BMP = \frac{1}{2}\sphericalangle M$

נסמן: $\frac{1}{2}\sphericalangle M = \alpha$

(א) במשולש ישר-זווית APM : $\sphericalangle APM = 90° - \sphericalangle M = 90° - 2\alpha$

$\sphericalangle MKP = 180° - \sphericalangle KMP - \sphericalangle MPK = 180° - \alpha - (90° - 2\alpha) =$

$= 90° + \alpha$

זוויות המשולש MPK הן: α , $90° - 2\alpha$, $90° + \alpha$.

(ב) לפי משפט הסינוסים ב- ΔMNP :

$$\frac{MP}{\sin \sphericalangle N} = 2R$$

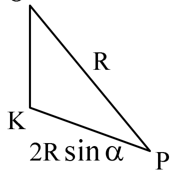
$$\frac{MP}{\sin(90° - \alpha)} = 2R \Rightarrow MP = 2R \cdot \sin(90° - \alpha) = 2R\cos\alpha$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔMKP : $\frac{MP}{\sin\sphericalangle K} = \frac{MK}{\sin\sphericalangle P}$

$$\frac{2R\cos\alpha}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{MK}{\sin(90° - 2\alpha)}$$

$$\frac{2R\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{MK}{\cos 2\alpha} \Rightarrow MK = 2R\cos 2\alpha$$

$$\frac{MP}{\sin\sphericalangle K} = \frac{KP}{\sin\sphericalangle M} \Rightarrow \frac{2R\cos\alpha}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{KP}{\sin\alpha} \Rightarrow KP = 2R\sin\alpha$$



(ג) אנך אמצעי למיתר (BM) עובר דרך מרכז המעגל.

$OM = OP = R \Rightarrow \sphericalangle OPM = \sphericalangle OMP = \alpha$

$\sphericalangle OPK = \sphericalangle MPK - \sphericalangle MPO =$

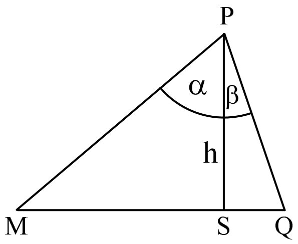
$= 90° - 2\alpha - \alpha = 90° - 3\alpha$

המשך בעמוד הבא >>>

$$S_{\Delta OPK} = \frac{OP \cdot PK}{2} \cdot \sin \measuredangle OPK =$$

$$S_{\Delta OPK} = \frac{R \cdot 2R\sin\alpha}{2} \cdot \sin(90^\circ - 3\alpha) = R^2 \sin\alpha \cos 3\alpha$$

(6) (א) ניעזר בנתונים שבסרטוט:



$$\Delta PSQ : \tan\beta = \frac{SQ}{h} \Rightarrow SQ = h\tan\beta$$

$$\Delta PSM : \tan\alpha = \frac{MS}{h} \Rightarrow MS = h\tan\alpha$$

לכן:

$$S_{\Delta PMQ} = \frac{MQ \cdot h}{2} = \frac{(h\tan\alpha + h\tan\beta) \cdot h}{2} = \frac{1}{2}h^2(\tan\alpha + \tan\beta)$$

(ב) (i) מרובע PESF חסום במעגל ו- $\measuredangle EPF = \alpha + \beta$.

מכיוון שסכום זוויות נגדיות במרובע החסום במעגל שווה ל- 180° ,

הרי ש: $\measuredangle ESF = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

(ii) נסמן ב- O את מרכז המעגל. מכיוון ש- PS הוא קוטר,

הרי ש- $\measuredangle PES = \measuredangle PFS = 90^\circ$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל- 90°).

$$\Delta PES : \sin\alpha = \frac{ES}{h} \Rightarrow ES = h\sin\alpha$$

$$\Delta PFS : \sin\beta = \frac{SF}{h} \Rightarrow SF = h\sin\beta$$

$$S_{\Delta ESF} = \frac{ES \cdot SF \cdot \sin \measuredangle ESF}{2} = \frac{h\sin\alpha \cdot h\sin\beta \cdot \sin[180^\circ - (\alpha+\beta)]}{2}$$

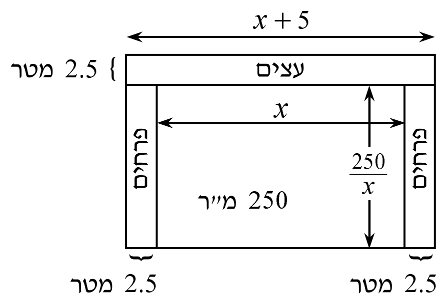
מכיוון ש- $\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)] = \sin(\alpha + \beta)$ נקבל:

$$S_{\Delta ESF} = \frac{h^2 \sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha+\beta)}{2}$$

כלומר:

$$\frac{S_{\Delta ESF}}{S_{\Delta PMQ}} = \frac{\frac{1}{2}h^2 \sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha+\beta)}{\frac{1}{2}h^2 (\tan\alpha + \tan\beta)} = \frac{\sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha+\beta)}{\tan\alpha + \tan\beta}$$

(7) נסמן ב- x (מטרים) את אורך אחת הצלעות של המבנה המלבני ששטחו 250 מ״ר.
ניעזר בסרטוט ובסימונים שעליו.



שטח המבנה המלבני הוא 250 מ״ר ואורך אחת מצלעותיו x מטר,
לכן אורך הצלע השנייה $\frac{250}{x}$ מטר.
לפנינו שאלת מינימום שבה פונקצית המטרה היא עלות הגינון.
מחיר מ״ר גינון בעצים: 50 ש״ח $= 1.25 \cdot 40$.

$$\underbrace{f(x)}_{\text{עלות הגינון}} = \underbrace{40 \cdot 2.5 \cdot \frac{250}{x} \cdot 2}_{\text{עלות גינון 2 חלקות הפרחים}} + \underbrace{50 \cdot 2.5(x+5)}_{\text{עלות גינון חלקת העצים}}$$

$$f(x) = \frac{50,000}{x} + 125x + 625$$

$$f'(x) = -\frac{50,000}{x^2} + 125 = 0$$

$$-50,000 + 125x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 125x^2 = 50,000$$

$$x^2 = 400 \quad \Rightarrow \quad x = 20$$ (הפתרון $x = -20$ נפסל)

לקביעת סוג הקיצון: $f''(x) = \left(-\frac{50,000}{x^2}\right)' = -50,000 \cdot \left(\frac{-2}{x^3}\right) = \frac{100,000}{x^3}$

$$f''(20) > 0 \quad \Rightarrow \quad \min$$

נשאלנו מה צריך להיות אורך חזית החלקה והוא מסומן על-ידי $x+5$ מטרים.
תשובה: כדי שעלות הגינון תהיה מינימלית, אורך חזית החלקה צריך להיות 25 מטר.

(8) (א) $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+\mathrm{m})^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+\mathrm{m})^2 = 1$

כלומר: $x + \mathrm{m} = 1$ או $x + \mathrm{m} = -1$.
מכיוון שנתון: $x_1 > x_2$, הרי: $x_2 = -1 - \mathrm{m}$, $x_1 = 1 - \mathrm{m}$.

(ב) $x_1 = 2x_2 \quad \Rightarrow \quad 1 - \mathrm{m} = 2(-1-\mathrm{m})$

$$1 - \mathrm{m} = -2 - 2\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{m} = -3$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ג) $f(x)=x+\frac{1}{x-3}$

מצאנו את שיעור ה- x של הנקודות החשודות לקיצון.

$$x_1=1-(-3)=4 \;\Rightarrow\; y_1=4+\frac{1}{4-3}=5 \;\Rightarrow\; (4,5)$$

$$x_2=-1-(-3)=2 \;\Rightarrow\; y_2=2+\frac{1}{2-3}=1 \;\Rightarrow\; (2,1)$$

נשים לב ש- $x=3$ היא משוואת האסימפטוטה האנכית, כי $x=3$

אינו נמצא בתחום ההגדרה ($x=3$ מאפס מכנה).

למציאת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה, ניעזר בטבלה:

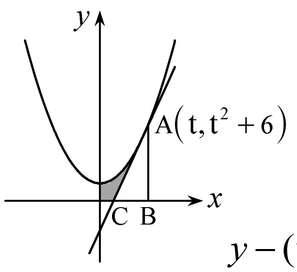
x	x < 2	x = 2	2 < x < 3	x = 3	3 < x < 4	x = 4	x > 4
f′(x)	+	max	−	נקודת אי-הגדרה	−	min	+
f(x)	↗		↘		↘		↗

$$f'(1)=1-\frac{1}{(1-3)^2}>0 \qquad f'(2.5)=1-\frac{1}{(2.5-3)^2}<0$$

$$f'(3.5)=1-\frac{1}{(3.5-3)^2}<0 \qquad f'(5)=1-\frac{1}{(5-3)^2}>0$$

ונקבל: $\max(2,1)$, $\min(4,5)$.

תחומי עלייה: $x>4$, $x<2$. תחומי ירידה: $3<x<4$, $2<x<3$.



(9) (א) נמצא את שיפוע המשיק:

$$y'=2x$$
$$m=y'(t)=2t$$

לכן משוואת המשיק:

$$y-(t^2+6)=2t(x-t) \;\Rightarrow\; y=2tx-t^2+6$$

(ב) נציב $x=0$ במשוואת המשיק ונקבל את נקודת החיתוך של המשיק

עם ציר ה- y : $(0,6-t^2)$.

נציב $y=0$ במשוואת המשיק ונקבל את נקודת החיתוך של המשיק

עם ציר ה- x : $0=2tx-t^2+6 \Rightarrow 2tx=t^2-6 \Rightarrow x=\frac{t^2-6}{2t}$

כלומר: $\left(\frac{t^2-6}{2t},0\right)$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

ג) נוריד אנך מנקודה A לציר ה- x ונסמן את נקודת החיתוך ב- B .
נסמן ב- C את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
נשים לב שניתן לחשב את השטח המבוקש בצורה הבאה :

$$S_{\text{מבוקש}} = \int_0^t (x^2+6)\,dx - S_{\Delta ABC}$$

$$\int_0^t (x^2+6)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+6x\right]_0^t = \frac{t^3}{3}+6t$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB\cdot BC}{2} = \frac{\left(t^2+6\right)\cdot\left(t-\frac{t^2-6}{2t}\right)}{2} = \frac{\left(t^2+6\right)\cdot\frac{2t^2-t^2+6}{2t}}{2} =$$

$$= \frac{\left(t^2+6\right)\left(t^2+6\right)}{4t}$$

לכן :

$$S_{\text{מבוקש}} = \frac{t^3}{3}+6t-\frac{\left(t^2+6\right)\left(t^2+6\right)}{4t} = \frac{t^3}{3}+6t-\frac{t^4+12t^2+36}{4t} =$$

$$= \frac{1}{3}t^3+6t-\frac{t^3}{4}-3t-\frac{9}{t} = \frac{1}{12}t^3+3t-\frac{9}{t}$$

ד)

$$\frac{1}{12}t^3+3t-\frac{9}{t} = \frac{99}{4t} \quad /\cdot 12t$$

$$t^4+36t^2-108 = 297$$

$$t^4+36t^2-405 = 0$$

נסמן $y = t^2$ ונקבל את המשוואה הריבועית :

$$y^2+36y-405 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-36\pm 54}{2}$$

כלומר : $y_2 = -45$, $y_1 = 9$ ($y_2 = -45$ נפסל).
לכן $9 = t^2$ ומכאן $t = 3$ ($t = -3$ נפסל כי נתון $t > 3$).