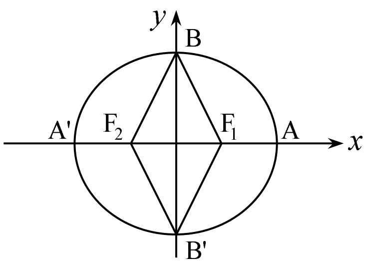
פתרון מבחן מס' 40 (ספר מבחנים – שאלון 035807)



(1) (א) $BF_1 = BF_2 = a$, $BF_1 = \sqrt{45}$

מכאן: $a = \sqrt{45}$.

$S_{\text{מעוין}} = \sqrt{45} \cdot \frac{12}{\sqrt{5}} =$ 36 יחידות שטח

$S_{\text{מעוין}} = \frac{BB' \cdot F_1F_2}{2} = \frac{2b \cdot 2c}{2} = 2b\sqrt{a^2 - b^2}$

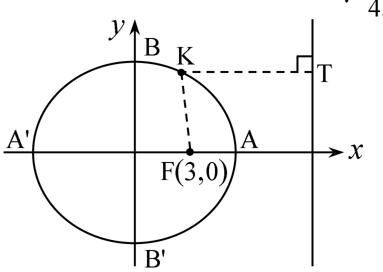
$$2b\sqrt{45 - b^2} = 36 \quad \Rightarrow \quad b\sqrt{45 - b^2} = 18$$

$$b^2(45 - b^2) = 324 \quad \Rightarrow \quad (b^2)^2 - 45b^2 + 324 = 0$$

$$(b^2)_{1,2} = \frac{45 \pm 27}{2} \quad \Rightarrow \quad b^2{}_1 = 36 \ , \ b^2{}_2 = 9$$

הפתרון $b^2{}_2 = 9$ נפסל כי נתון $b > 3$.

תשובה: משוואת האליפסה: $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$.



(ב) K נקודה כלשהי על האליפסה.

צ"ל: $KF = \frac{\sqrt{5}}{5} KT$. נסמן: $K(t,p)$.

$KF = \sqrt{(3-t)^2 + p^2}$

$KT = 15 - x_K = 15 - t$

$$\sqrt{(3-t)^2 + p^2} \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{5}}{5}(15 - t) \quad ①$$

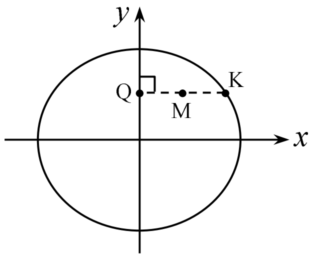
$$9 - 6t + t^2 + p^2 \stackrel{?}{=} \tfrac{1}{5}(225 - 30t + t^2)$$

$$45 - 30t + 5t^2 + 5p^2 \stackrel{?}{=} 225 - 30t + t^2$$

$$4t^2 + 5p^2 \stackrel{?}{=} 180 \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2}{45} + \frac{p^2}{36} \stackrel{?}{=} 1 \quad ②$$

נתון שהנקודה K נמצאת על האליפסה, לכן שיעוריה מקיימים את משוואת האליפסה, לכן שוויון ② נכון ולכן גם שוויון ① נכון.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄



(ג) K נקודה כלשהי על האליפסה.

ציר ה- y, $KQ \perp y$, $QM = MK$.

יש למצוא את המקום הגאומטרי

של הנקודות M . נסמן $M(a,b)$.

$$x_K = 2x_M = 2a \;,\; y_K = y_M = b \;\Rightarrow\; K(2a,b)$$

הנקודה K נמצאת על האליפסה הנתונה, לכן שיעוריה מקיימים

את משוואת האליפסה: $\frac{4a^2}{45} + \frac{b^2}{36} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{11.25} + \frac{y^2}{36} = 1$

(2) $BM = MA \;,\; BC = 4 \cdot CN \;,\; \overrightarrow{BM} = \underline{v} \;,\; \overrightarrow{CN} = \underline{u}$

(א) $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} \;,\; AN = 5 \cdot ND$

$$\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CN} = 4\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CN} = 3\overrightarrow{CN} = 3\underline{u}$$

$$\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} = 3\underline{u} + 2\underline{v}$$

נמצא את $\overrightarrow{ND}$: $\overrightarrow{ND} = \frac{1}{5}\overrightarrow{NA} = \frac{1}{5}(3\underline{u} + 2\underline{v}) = \frac{3}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{ND} = \underline{u} + \frac{3}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v} = \frac{8}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}$$

(ב) $\overrightarrow{CM} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD} \;\Rightarrow\; 4\underline{u} + \underline{v} = \alpha \cdot \left(\frac{8}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}\right)$

$$4\underline{u} + \underline{v} = \frac{8\alpha}{5}\underline{u} + \frac{2\alpha}{5}\underline{v}$$

$$\begin{cases} \frac{8\alpha}{5} = 4 \\ \frac{2\alpha}{5} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5}{2} \\ \alpha = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{2}$$

$$\frac{CM}{CD} = \frac{5}{2} \;\Rightarrow\; \frac{MD}{DC} = \frac{3}{2} \;,\; \frac{CD}{DM} = \frac{2}{3}$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ג) נסמן: $S_{\Delta CDN} = A$.

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CDN}} = \frac{AD}{DN} = \frac{4}{1} \quad \Rightarrow \quad S_{\Delta ACD} = 4A$$

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ADM}} = \frac{CD}{DM} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad S_{\Delta ADM} = \frac{3}{2} S_{\Delta ACD} = \frac{3}{2} \cdot 4A = 6A$$

$$S_{\Delta ACM} = S_{\Delta ACD} + S_{\Delta ADM} = 4A + 6A = 10A$$

התיכון CM מחלק את ΔABC לשני משולשים שווי-שטח, לכן:

$$S_{\Delta BCM} = S_{\Delta ACM} = 10A$$

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACM} + S_{\Delta BCM} = 10A + 10A = 20A$$

$$\frac{S_{\Delta ADC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{4A}{20A} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

(ד) (*i*) הקטעים AN ו- CM נחתכים, לכן למערכת הבאה חייב להיות פתרון:

$$\begin{cases} 1 + t = 8 + 2r \\ 1 - t = k + r \\ -2 + tk = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3}{k} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 + \frac{3}{k} = 8 + 2r \\ 1 - \frac{3}{k} = k + r \quad / \cdot (-2) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 1 + \frac{3}{k} = 8 + 2r \\ -2 + \frac{6}{k} = -2k - 2r \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -1 + \frac{9}{k} = 8 - 2k \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{k} = 9 - 2k$$

$$2k^2 - 9k + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{9 \pm 3}{4} \quad \Rightarrow \quad k_1 = 3 \ , \ k_2 = 1.5$$

הפתרון $k_2 = 1.5$ נפסל כי נתון ש- k הוא מספר שלם.

תשובה: $k = 3$.

(*ii*) $k = 3 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3}{k} = \frac{3}{3} = 1$

שיעורי הנקודה D :

$$(1,1,-2) + 1 \cdot (1,-1,3) = (1,1,-2) + (1,-1,3) \quad \Rightarrow \quad D(2,0,1)$$

המשך בעמוד הבא ⯇⯇⯇

(iii) $$\cos\measuredangle ADM = \frac{|\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{NA}|}{|\overrightarrow{CM}|\cdot|\overrightarrow{NA}|} = \frac{|(2,1,0)\cdot(-1,1,-3)|}{\sqrt{2^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+3^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{55}}$$

$$\cos\measuredangle ADM = \frac{1}{\sqrt{55}} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle ADM \approx 82.25°$$

(iv) משוואת מישור ABC: $ax+by+cz+d=0 \quad (*)$

הוקטור (a,b,c) מאונך למישור, לכן הוא מאונך ל- $\overrightarrow{CM}$

וגם ל- $\overrightarrow{AN}$:

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(2,1,0)=0\\(a,b,c)\cdot(1,-1,3)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2a+b=0\\a-b+3c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=-2a\\a+2a+3c=0 \quad \Rightarrow \quad c=-a\end{cases}$$

נציב ב- $(*)$ ונקבל: $ax-2ay-az+d=0$

הנקודה $D(2,0,1)$ נמצאת במישור ABC, לכן שיעוריה

מקיימים את משוואת המישור:

$$2a-2a\cdot 0-a+d=0 \quad \Rightarrow \quad d=-a$$

משוואת המישור ABC: $x-2y-z-1=0$

(v) משוואת המישורים המקבילים למישור ABC:

$$x-2y-z+d=0$$

$$\frac{|d+1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = 2\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad |d+1|=12$$

$$d+1=12 \quad \Rightarrow \quad d=11 \quad \Rightarrow \quad x-2y-z+11=0$$

$$d+1=-12 \quad \Rightarrow \quad d=-13 \quad \Rightarrow \quad x-2y-z-13=0$$

(3)

$$z^3 - 4(1-i)z^2 + 16(1-i)z + 64i = 0$$

(א) (i)

$$z_1 = -4i$$

$$(-4i)^3 - 4(1-i)\cdot(-4i)^2 + 16(1-i)\cdot(-4i) + 64i =$$

$$= 64i + 64(1-i) + 16(-4-4i) + 64i =$$

$$= 64i + 64 - 64i - 64 - 64i + 64i = 0$$

הצבת z_1 במשוואה נותנת פסוק אמת, לכן z_1 הוא שורש המשוואה הנתונה.

(ii)

$$z_2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i \quad \Rightarrow \quad r_2 = \sqrt{4 + 4\cdot 3} = 4$$

$$\tan\theta_2 = \frac{2\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = 60° \quad \Rightarrow \quad z_2 = 4\,\text{cis}\,60°$$

$$z_3 = 2 - 2\sqrt{3}\,i = \overline{z}_2 = 4\,\text{cis}(-60°)$$

$$z_k = \left(\frac{z_2}{8}\right)^k - \left(\frac{z_3}{8}\right)^k = \left(\tfrac{1}{2}\text{cis}\,60°\right)^k - \left[\tfrac{1}{2}\text{cis}(-60°)\right]^k =$$

$$= \frac{1}{2^k}\text{cis}\,60°k - \frac{1}{2^k}\text{cis}(-60°k) =$$

$$= \frac{1}{2^k}[\cos 60°k + i\sin 60°k - (\cos 60°k - i\sin 60°k)] =$$

$$= \frac{1}{2^k}(\cos 60°k + i\sin 60°k - \cos 60°k + i\sin 60°k) =$$

$$= \frac{1}{2^k}\cdot 2i\cdot \sin 60°k = \frac{i}{2^{k-1}}\sin 60°k$$

$$z_{2,016} = \frac{i}{2^{2,016-1}}\cdot\sin(60°\cdot 2,016) = \frac{i}{2^{2015}}\sin 120,960° =$$

$$= \frac{i}{2^{2015}}\sin(336\cdot 360°) = \frac{i}{2^{2015}}\sin 0 = 0$$

(ב) (i)

$$z_C = \tfrac{3}{2}z_A + z_B = \tfrac{3}{2}(2 + 2\sqrt{3}\,i) + 2 - 2\sqrt{3}\,i =$$

$$= 3 + 3\sqrt{3}\,i + 2 - 2\sqrt{3}\,i = 5 + \sqrt{3}\,i$$

תשובה: $C(5,\sqrt{3})$.

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

(*ii*)
$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{2-2\sqrt{3}\,i-5-\sqrt{3}\,i}{2+2\sqrt{3}\,i-5-\sqrt{3}\,i} = \frac{-3-3\sqrt{3}\,i}{-3+\sqrt{3}\,i}\cdot\frac{-3-\sqrt{3}\,i}{-3-\sqrt{3}\,i} =$$
$$= \frac{9-3\sqrt{3}\,i+9\sqrt{3}\,i-9}{9+3} = \frac{6\sqrt{3}\,i}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{cis}\,90^\circ$$

תשובה: $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = 90^\circ$.

(*iii*) $A(2,2\sqrt{3})\ ,\ B(2,-2\sqrt{3})\ ,\ C(5,\sqrt{3})$

$$AB = \sqrt{0^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{48}$$
$$BC = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36}$$
$$AC = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12}$$

קיבלנו ש- $AB^2 = BC^2 + AC^2$ ($36+12=48$),

לכן המשולש הוא ישר-זווית ($\measuredangle C = 90^\circ$).

(4) (א) (*i*) נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ קיימות כאשר $f'(x)=0$ ומחליפה את סימנה. לפי הגרף והנתונים:

עבור $x<b$ הפונקציה $f(x)$ עולה

ועבור $b<x<0$ הפונקציה $f(x)$ יורדת, לכן: $\max(b,s)$.

עבור $b<x<0$ הפונקציה $f(x)$ יורדת

ועבור $x>0$ הפונקציה $f(x)$ עולה, לכן: $\min(0,p)$.

(*ii*) נקודות פיתול של הפונקציה $f(x)$ קיימות כאשר $f''(x)=0$,

כלומר כאשר $[f'(x)]'=0$, כלומר בנקודות הקיצון של $f'(x)$,

כלומר בנקודה (c,q) :

עבור $x<c$, $f'(x)$ יורדת, כלומר $f''(x)<0$,

לכן הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ עבור $x<c$.

עבור $x>c$, $f'(x)$ עולה, כלומר $f''(x)>0$,

לכן הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ עבור $x>c$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(iii)
$$y-\mathrm{q}=f'(\mathrm{c})\cdot(x-\mathrm{c}) \quad\Rightarrow\quad y-\mathrm{q}=\mathrm{k}(x-\mathrm{c})$$
$$y=\mathrm{k}x+\mathrm{q}-\mathrm{kc}$$

ב) $x_1=\mathrm{b}\ ,\ x_2=\mathrm{c}$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{f'(x)}{e^{f(x)}}\,dx=\int_{\mathrm{b}}^{\mathrm{c}}\frac{f'(x)}{e^{f(x)}}\,dx$$

נסמן:
$$f(x)=t$$
$$f'(x)dx=dt \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{dt}{f'(x)}$$
$$\int\frac{f'(x)}{e^{f(x)}}dx=\int\frac{f'(x)}{e^t}\cdot\frac{dt}{f'(x)}=\int\frac{dt}{e^t}=-e^{-t}+\mathrm{C}=-e^{-f(x)}+\mathrm{C}$$
$$\int_{\mathrm{b}}^{\mathrm{c}}\frac{f'(x)}{e^{f(x)}}\,dx=(-e^{-f(x)})\Big|_{\mathrm{b}}^{\mathrm{c}}=-e^{-f(\mathrm{c})}+e^{-f(\mathrm{b})}=-e^{-\mathrm{q}}+e^{-\mathrm{s}}$$

(5)
$$f(x)=4^x-\mathrm{a}\cdot2^x+\mathrm{b} \qquad g(x)=2^x-7$$
$$f(1)=-5\ ,\ f''(1)=0$$

א) לפונקציה $g(x)$ אין נקודות קיצון ואין נקודות פיתול, היא עולה לכל x.

$$f(1)=-5 \quad\Rightarrow\quad 4-2\mathrm{a}+\mathrm{b}=-5 \quad (*)$$
$$f'(x)=4^x\cdot\ln4-\mathrm{a}\cdot2^x\cdot\ln2$$
$$f''(x)=4^x\cdot\ln^2 4-\mathrm{a}\cdot2^x\cdot\ln^2 2$$
$$f''(1)=0 \quad\Rightarrow\quad 4\ln^2 4-2\mathrm{a}\ln^2 2=0$$
$$4(2\ln2)^2-2\mathrm{a}\ln^2 2=0 \quad\Rightarrow\quad 16\ln^2 2-2\mathrm{a}\ln^2 2=0$$
$$2\ln^2 2(8-\mathrm{a})=0$$

$2\ln^2 2>0$, לכן:
$$8-\mathrm{a}=0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{a}=8$$

נציב $\mathrm{a}=8$ ב- $(*)$ ונקבל:
$$4-2\cdot8+\mathrm{b}=-5 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{b}=7$$

המשך בעמוד הבא >>>

(ב) $f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 4^x\cdot 2\ln 2-8\cdot 2^x\cdot \ln 2=0 \quad /:2\ln 2$

$2^x(2^x-4)=0$

$2^x=0 \;\Rightarrow$ לא ייתכן, כי $2^x>0$ לכל x

$2^x-4=0 \;\Rightarrow\; 2^x=4 \;\Rightarrow\; x=2$

$f(2)=4^2-8\cdot 2^2+7=-9 \;\Rightarrow\; (2,-9)$

x	x < 2	x = 2	x > 2
f′(x)	−	0	+
f(x)	↘	min	↗

$f'(1)=(+)\cdot(2^1-4)<0 \qquad f'(3)=(+)\cdot(2^3-4)>0$

תשובה: $\min(2,-9)$.

(ג) נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$:

$2^x-7=4^x-8\cdot 2^x+7 \;\Rightarrow\; 4^x-9\cdot 2^x+14=0$

$(2^x)^2-9\cdot(2^x)+14=0 \;\Rightarrow\; (2^x)_{1,2}=\frac{9\pm 5}{2}$

$2^x=7 \;\Rightarrow\; x=\log_2 7$

$2^x=2 \;\Rightarrow\; x=1 \;\Rightarrow\; y=-5$

$\log_2 7>1 \;\Rightarrow\; A(1,-5)$

משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המינימום שלה:

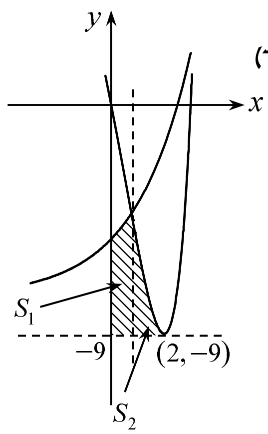
$y=y_{\min}=-9$

(ד)

$$S_1=\int_0^1[g(x)-y]\,dx=\int_0^1(2^x-7+9)\,dx=$$

$$=\int_0^1(2^x+2)\,dx=\left(\frac{2^x}{\ln 2}+2x\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{2}{\ln 2}+2-\frac{1}{\ln 2}=\left(\frac{1}{\ln 2}+2\right)$$ יחידות שטח



המשך בעמוד הבא >>>

$$S_2 = \int_1^2 [f(x) - y]\,dx =$$

$$= \int_1^2 (4^x - 8 \cdot 2^x + 7 + 9)\,dx = \int_1^2 (4^x - 8 \cdot 2^x + 16)\,dx =$$

$$= \left(\frac{4^x}{\ln 4} - 8 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + 16x \right) \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{16}{\ln 4} - \frac{8 \cdot 4}{\ln 2} + 32 - \left(\frac{4}{\ln 4} - \frac{16}{\ln 2} + 16 \right) =$$

$$= \frac{12}{\ln 4} - \frac{16}{\ln 2} + 16 = \frac{6}{\ln 2} - \frac{16}{\ln 2} + 16 = \left(16 - \frac{10}{\ln 2}\right) \text{ יחידות שטח}$$

$$S_{\text{מבוקש}} = S_1 + S_2 = \frac{1}{\ln 2} + 2 + 16 - \frac{10}{\ln 2} =$$

$$= 18 - \frac{9}{\ln 2} \approx 5.02 \text{ יחידות שטח}$$

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות