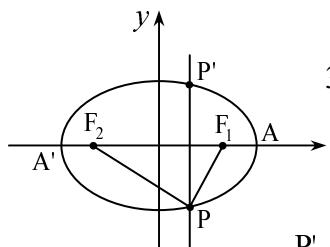


פתרון מבחון מס' 37 (ספר מבחנים – שאלון 035807)



(א) סכום מרחקי נקודה על האליפסה מהמקדים

$$\text{הוא } 2a, \text{ לכן : } 3.2 + 6.8 = 2a \Rightarrow a = 5$$

(שיעורו לב כי בספר יש טעות במרחקים של הנקודה P מהמקדים).

משוואת PP' היא $x = 3$, לכן הנקודות P ו- P'

הן סימטריות ביחס לציר ה- y, ולכן :

$$|y_P| = |y_{P'}| = \frac{1}{2} PP' = \frac{1}{2} \cdot 6.4 = 3.2$$

שיעור הנקודות P, P' הם $(3, \pm 3.2)$ והנקודות נמצאות על האליפסה,

כלומר שיעורי הנקודות מקיימים את משוואת האליפסה.

$$\frac{3^2}{5^2} + \frac{3.2^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{3.2^2}{b^2} = \frac{4^2}{5^2} \Rightarrow b^2 = \left(\frac{3.2 \cdot 5}{4}\right)^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{מכאן, משוואת האליפסה :}$$

$$\begin{cases} x_N = x \\ y_N = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = x \\ y_N = 1.25y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_N \\ y = 0.8y_N \end{cases} \quad (\text{ב})$$

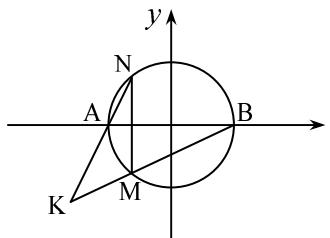
$$\frac{x_N^2}{25} + \frac{(0.8y_N)^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

דרך אחרת:

שיעור ה- x של הנקודות לא השתנה, לכן AA' הוא קוטר המגלל.

$$2R = AA' = 2a = 2 \cdot 5 = 10 \Rightarrow R = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

$$\therefore N(t, -p), M(t, p), B(5, 0), A(-5, 0) \quad (\text{ג})$$



$$m_{AN} = \frac{-p}{t+5} \quad : AN$$

$$y = \frac{-p}{t+5}(x+5)$$

$$m_{BM} = \frac{p}{t-5} \quad : BM$$

$$y = \frac{p}{t-5}(x-5)$$

המשך בעמוד הבא <<>

מציאת שיעורי הנקודה K (נקודות החיתוך של AN ו-BM) :

$$\begin{cases} y = \frac{-p}{t+5}(x+5) \\ y = \frac{p}{t-5}(x-5) \end{cases} \Rightarrow \frac{-p}{t+5}(x+5) = \frac{p}{t-5}(x-5)$$

$(t-5)(x+5) = -(t+5)(x-5)$ אם $p \neq 0$ (כלומר $t \neq \pm 5$) או

$$tx + 5t - 5x - 25 = -tx + 5t - 5x + 25$$

$$tx = 25 \Rightarrow t = \frac{25}{x}, x = \frac{25}{t} (t \neq 0)$$

$$y = \frac{p}{t-5}(x-5) = \frac{p}{t-5}\left(\frac{25}{t}-5\right) = \frac{p}{t-5} \cdot \frac{25-5t}{t} =$$

$$= \frac{p}{t-5} \cdot \frac{5(5-t)}{t} = \frac{-5p}{t}$$

$$p = \frac{-ty}{5} = -\frac{25}{x} \cdot \frac{y}{5} = \frac{-5y}{x}$$

הנקודות M ו-N נמצאות על המעגל, לכן :

$$\left(\frac{25}{x}\right)^2 + \left(-\frac{5y}{x}\right)^2 = 25 \Rightarrow \frac{625}{x^2} + \frac{25y^2}{x^2} = 25 \quad \text{מכאן :}$$

$$625 + 25y^2 = 25x^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 25 \quad (x \neq 0, \pm 5)$$

$$z_1 = \text{cis } \alpha, z_2 = \text{cis } \beta, z_3 = \text{cis } \gamma \quad (N) (2)$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

$$(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) + i(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0 \\ \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} &= \frac{1}{\text{cis } \alpha} + \frac{1}{\text{cis } \beta} + \frac{1}{\text{cis } \gamma} = \\ &= \text{cis}(-\alpha) + \text{cis}(-\beta) + \text{cis}(-\gamma) = \\ &= \cos(-\alpha) + \cos(-\beta) + \cos(-\gamma) + \\ &\quad + i[\sin(-\alpha) + \sin(-\beta) + \sin(-\gamma)] = \end{aligned}$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$\begin{aligned}
 &= \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + i(-\sin \alpha - \sin \beta - \sin \gamma) = \\
 &= (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) - i(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = \\
 &= 0 - i \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

(ב) נסמן: $z = r \operatorname{cis} \theta$

$$w = \frac{z^2}{\bar{z}^2} = \frac{r^2 \operatorname{cis} 2\theta}{r^2 \operatorname{cis} (-2\theta)} = \operatorname{cis} 4\theta$$

$$w = R \operatorname{cis} \alpha \Rightarrow R \operatorname{cis} \alpha = 1 \cdot \operatorname{cis} 4\theta \Rightarrow R = 1, \alpha = 4\theta$$

(לא מתייחסים למקרה של \sin ו- \cos).

$$\overrightarrow{CB'} = \underline{w} - \underline{v}$$

(א) (3)

$$\overrightarrow{CD'} = \underline{w} - \underline{u}$$

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 \textcircled{1} \quad \overrightarrow{AP} = \alpha \cdot \overrightarrow{AD'} + \beta \cdot \overrightarrow{AB'} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1 \\
 \textcircled{2} \quad \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{CB'} \\
 \textcircled{3} \quad \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{CD'}
 \end{array}
 \right.$$

$$\overrightarrow{AD'} = \underline{v} + \underline{w}, \quad \overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v}, \quad \overrightarrow{AB'} = \underline{u} + \underline{w}$$

לפי ① קיבל:

$$\alpha(\underline{v} + \underline{w}) + \beta(\underline{u} + \underline{w}) + (1 - \alpha - \beta)(\underline{u} + \underline{v}) = \overrightarrow{AP}$$

$$\overrightarrow{AP} = (\beta + 1 - \alpha - \beta)\underline{u} + (\alpha + 1 - \alpha - \beta)\underline{v} + (\alpha + \beta)\underline{w} =$$

$$= (1 - \alpha)\underline{u} + (1 - \beta)\underline{v} + (\alpha + \beta)\underline{w} \quad ④$$

לפי ③ ו- ② :

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 [(1 - \alpha)\underline{u} + (1 - \beta)\underline{v} + (\alpha + \beta)\underline{w}] \cdot (\underline{w} - \underline{v}) = 0 \\
 [(1 - \alpha)\underline{u} + (1 - \beta)\underline{v} + (\alpha + \beta)\underline{w}] \cdot (\underline{w} - \underline{u}) = 0
 \end{array}
 \right.$$

המשך בעמוד הבא <<>

$$\begin{cases} (\alpha + \beta) \cdot |\underline{w}|^2 - (1 - \beta) \cdot |\underline{v}|^2 = 0 \\ (\alpha + \beta) \cdot |\underline{w}|^2 - (1 - \alpha) \cdot |\underline{u}|^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha + \beta) \cdot 6 - (1 - \beta) \cdot 2 = 0 \\ (\alpha + \beta) \cdot 6 - (1 - \alpha) \cdot 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 3\beta - 1 + \beta = 0 \\ \alpha + \beta - 2 + 2\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha + 4\beta = 1 \\ 3\alpha + \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{7}{9}, \beta = -\frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{9}\underline{u} + \frac{4}{3}\underline{v} + \frac{4}{9}\underline{w}$$

נציב ב- ④ ונקבל :

$$V_{AB'CD'} = V_{\text{תיבנה}} - V_{A'AB'D'} - V_{CC'B'D'} - V_{B'ABC} - V_{D'ADC} \quad (ב)$$

$$V_{\text{תיבנה}} = AB \cdot AD \cdot AA' = \sqrt{12} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 12 \text{ יחידות נפח}$$

$$V_{A'AB'D'} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABD'} \cdot AA' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 2 \text{ יחידות נפח}$$

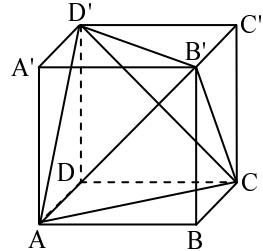
$$V_{CC'B'D'} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta BCD'} \cdot CC' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 2 \text{ יחידות נפח}$$

$$V_{B'ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot BB' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 2 \text{ יחידות נפח}$$

$$V_{D'ADC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ADC} \cdot DD' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 2 \text{ יחידות נפח}$$

$$V_{AB'CD'} = 12 - 2 - 2 - 2 - 2 = 4 \text{ יחידות נפח}$$

(א) נסמן את הזווית בין $\overrightarrow{AA'}$ ו- \overrightarrow{AP} ב- α , מכאן :

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AA'}}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AA'}|} = \frac{\frac{2}{9}(\underline{u} + 6\underline{v} + 2\underline{w}) \cdot \underline{w}}{\frac{2}{9}\sqrt{(\underline{u} + 6\underline{v} + 2\underline{w}) \cdot (\underline{u} + 6\underline{v} + 2\underline{w})} \cdot \sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\frac{2}{9} \cdot 2 \cdot |\underline{w}|^2}{\sqrt{12 + 36 \cdot 2 + 4 \cdot 6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\frac{2}{9} \cdot 6}{\sqrt{108 \cdot 6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\alpha \approx 61.87^\circ$$

מכאן :

המשך בעמוד הבא ▶▶▶

$$\begin{aligned} A(0,0,0), B(\sqrt{12},0,0), D(0,\sqrt{2},0), A'(0,0,\sqrt{6}) & \quad (d) \\ \underline{u} = (\sqrt{12},0,0), \underline{v} = (0,\sqrt{2},0), \underline{w} = (0,0,\sqrt{6}) \\ \overrightarrow{AP} = \frac{2}{9}[(\sqrt{12},0,0) + 6(0,\sqrt{2},0) + 2(0,0,\sqrt{6})] = \\ \overrightarrow{AP} = \left(\frac{2}{9}\sqrt{12}, \frac{12}{9}\sqrt{2}, \frac{4}{9}\sqrt{6}\right) = \left(\frac{4}{9}\sqrt{3}, \frac{4}{3}\sqrt{2}, \frac{4}{9}\sqrt{6}\right) \\ P\left(\frac{4}{9}\sqrt{3}, \frac{4}{3}\sqrt{2}, \frac{4}{9}\sqrt{6}\right) & \quad \text{כלומר :} \end{aligned}$$

(א) נסמן ב- t_2 חודשים את מספר החודשים שבין המדייה השנייה לשליישית,

ואז $t_1 = t_2 + 4$ יהיה מספר החודשים שבין המדייה הראשונה לשנייה.

$$\begin{cases} 2,190 = 1,600 \cdot a^{t_2+4} \\ 2,562 = 2,190 \cdot a^{t_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4 \cdot a^{t_2} = 1.36875 \\ a^{t_2} = 1.169863 \end{cases} \quad (i)$$

$$a^4 \cdot 1.169863 = 1.36875 \Rightarrow a \approx 1.04$$

$$1 + \frac{p}{100} = 1.04 \Rightarrow p = 4\%$$

$$1.04^{t_2} = 1.169863 \Rightarrow t_2 = \frac{\ln 1.169863}{\ln 1.04} \approx 4 \quad (ii)$$

$$t_1 = 4 + t_2 = 4 + 4 = 8 \text{ חודשים}$$

$$M_0^8 = \text{ק"ג } 8 \quad (b) \quad \text{חומר א':}$$

$$T_{0.5}^8 = 3 \text{ חודשים} \Rightarrow \frac{M_0}{2} = M_0 \cdot a_1^3 \Rightarrow a_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$M_0^6 = \text{ק"ג } 6 \quad \text{חומר ב':}$$

$$T_{0.5}^6 = 6 \text{ חודשים} \Rightarrow \frac{M_0}{2} = M_0 \cdot a_2^6 \Rightarrow a_2 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$$

$$M_0^8 \cdot a_1^t + M_0^6 \cdot a_2^t = 10$$

$$8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}} = 10$$

המשך בעמוד הבא ▶▶▶

$$4z^2 + 3z = 5 \Rightarrow 4z^2 + 3z - 5 = 0 \quad \text{נסמן: } \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = z$$

$$z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{89}}{8} \Rightarrow z_1 = 0.8042476, z_2 = -1.55$$

הפתרונות: $z_2 = -1.55$ נפסל כי $z > 0$. מכאן:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = 0.8042476 \Rightarrow \frac{t}{6} = \frac{\ln 0.8042476}{\ln 0.5} \approx 0.3143$$

$$t = 0.3143 \cdot 6 = 1.886$$

$$(a < 0) f(x) = \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} \quad (5)$$

$$x^2 \neq 0, x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

(א) (i) תחום הגדרה:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} = \left(\frac{\infty}{0} \right) = \infty \quad (ii)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{-\frac{a}{x}} \cdot x^2} = \left(\frac{1}{\infty \cdot 0} \right)$$

פונקציה מעריכית עם בסיס גדול מ- 1 עולה מהר יותר

$$\left(\frac{1}{\infty \cdot 0} \right) = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0 \quad \text{מfonקציית חזקה, لكن במקרה זה:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} = 0 \quad \text{כלומר:}$$

$x = 0$ אסימפטוטה אנכית שמאלית.

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{a}{x}} \cdot \left(-\frac{a}{x^2}\right) \cdot x^2 - 2x \cdot e^{\frac{a}{x}}}{x^4} = \frac{-e^{\frac{a}{x}} \cdot (a + 2x)}{x^4} \quad (iii)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-e^{\frac{a}{x}} \cdot (a + 2x)}{x^4} = 0 \Rightarrow e^{\frac{a}{x}} (a + 2x) = 0$$

$$a + 2x = 0 \quad \text{לכל } x, \text{ لكن: } e^{\frac{a}{x}} > 0$$

$$x = -\frac{a}{2} \Rightarrow y = \frac{4e^{-2}}{a^2} = \frac{4}{a^2 e^2}$$

המשך הבא ▶▶▶

. $a + 2x$ לכל x , לכן סימן הנגזרת נקבע לפי הביטוי $\frac{-e^{\frac{a}{x}}}{x^4} < 0$

$$\text{מכאן: } \max\left(-\frac{a}{2}, \frac{4}{a^2 e^2}\right)$$

(ב) ראו פתרון בספר הבעיות, עמוד 199.

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{-a} \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} dx = \quad (1)$$

$$dt = -\frac{a}{x^2} \cdot e^{\frac{a}{x}} \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{-x^2}{ae^{\frac{a}{x}}} dt \quad : \text{נסמן, } e^{\frac{a}{x}} = t$$

$$\int \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} dx = \int \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} \cdot \left(-\frac{x^2}{ae^{\frac{a}{x}}} \right) dt = \int -\frac{1}{a} dt = -\frac{t}{a} = -\frac{e^{\frac{a}{x}}}{a}$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{-a} \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} dx = \left(-\frac{e^{\frac{a}{x}}}{a} \right) \Big|_{-\frac{a}{2}}^{-a} = -\frac{e^{-1}}{a} + \frac{e^{-2}}{a} = \frac{-e+1}{ae^2}$$

$$\frac{-e+1}{ae^2} = \frac{e-1}{2e^2} \quad : \text{נתון}$$

$$a = -2 \quad : \text{מכאן}$$



טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

❖ לכל ה大雨ות ❖ לכל השאלונים ❖ לכל הרמות