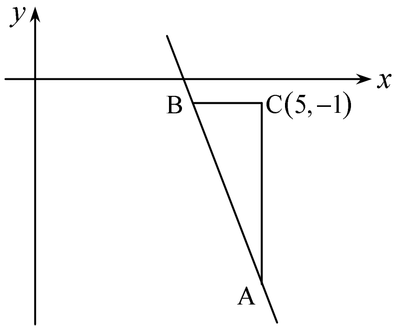
פתרון מבחן מס' 28 (ספר מבחנים – שאלון 035807)



(1) (א) משוואת הניצב

המקביל לציר ה- x (BC) :

$$y = y_C = -1$$

משוואת הניצב

המקביל לציר ה- y (AC) :

$$x = x_C = 5$$

שיעורי הנקודה B : $\begin{cases} y = -2x+6 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 3.5 \Rightarrow B(3.5,-1)$

שיעורי הנקודה A : $\begin{cases} y = -2x+6 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(5,-4)$

$AB = \sqrt{(5-3.5)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{11.25}$ יחידות אורך

(ב) נסמן : $x_A = t$, $x_B = r$. מכאן : $y_A = 6-2t$, $y_B = 6-2r$

$$\measuredangle C = 90° \Rightarrow BC \perp AC \Rightarrow m_{BC} \cdot m_{AC} = -1$$

$$\frac{6-2r+1}{r-5} \cdot \frac{6-2t+1}{t-5} = -1 \Rightarrow (7-2r)(7-2t) = -(r-5)(t-5)$$

נתון גם כי : $AB = \sqrt{11.25} \Rightarrow AB^2 = \frac{45}{4}$

$$(t-r)^2 + (6-2t-6+2r)^2 = \frac{45}{4}$$

מכאן : $(t-r)^2 + 4(t-r)^2 = \frac{45}{4} \Rightarrow (t-r)^2 = \frac{9}{4}$

$$t-r = \frac{3}{2} \text{ או } t-r = -\frac{3}{2}$$

נתון $x_A > x_B$, לכן $t > r$, כלומר הפתרון $t-r = -\frac{3}{2}$ נפסל.

המשך בעמוד הבא >>>

עבור $t-r=\frac{3}{2}$:

$$t=r+\tfrac{3}{2} \;\Rightarrow\; (7-2r)(7-2r-3)=-(r-5)(r-\tfrac{7}{2})$$

$$(7-2r)(4-2r)=(r-5)(\tfrac{7}{2}-r)$$

$$4r^2-22r+28=-r^2+\tfrac{17}{2}r-\tfrac{35}{2}$$

$$5r^2-30.5r+45.5=0 \;\Rightarrow\; 10r^2-61r+91=0$$

$$r_{1,2}=\frac{61\pm 9}{20} \;\Rightarrow\; r_1=3.5\ ,\ r_2=2.6$$

$$r_1=3.5 \;\Rightarrow\; t_1=5$$

$$r_2=2.6 \;\Rightarrow\; t_2=4.1$$

הפתרון הראשון נפסל, כי נתון שניצבי המשולש ABC אינם מקבילים לצירים (קיבלנו $x_C=x_A$). לכן: $A(4.1,-2.2)\ ,\ B(2.6,0.8)$

(2) (א)

$$\overrightarrow{AB}=\underline{v}-\underline{u}\ ,\ \overrightarrow{AC}=\underline{w}-\underline{u}$$

$$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}=\tfrac{2}{3}\cdot(\underline{u}+\underline{v}-\underline{w})\cdot(\underline{v}-\underline{u})=$$

$$=\tfrac{2}{3}\cdot(|\underline{v}|^2-|\underline{u}|^2-\underline{w}\cdot\underline{v}+\underline{w}\cdot\underline{u})$$

נתון: $\underline{w}\cdot\underline{u}=\underline{w}\cdot\underline{v}$. כמו כן, מכיוון שהפירמידה ישרה,

הרי ש- $|\underline{v}|^2=|\underline{u}|^2=|\underline{w}|^2$, מכאן נקבל: $\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AC}=\tfrac{2}{3}\cdot(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})\cdot(\underline{w}-\underline{u})=$$

$$=\tfrac{2}{3}\cdot(|\underline{w}|^2-|\underline{u}|^2+\underline{v}\cdot\underline{w}-\underline{v}\cdot\underline{u})=0$$

מכאן: $\overrightarrow{SM}\perp\overrightarrow{AC}$.

אם ישר מאונך לשני ישרים לא מקבילים במישור, אז הוא מאונך למישור.

מכאן: $\overrightarrow{SM}\perp ABC$.

המשך בעמוד הבא >>>

ב) $ABC:\ \underline{x}=(0,2\sqrt{3},0)+\alpha\cdot\overrightarrow{AC}+\beta\cdot\overrightarrow{AB}=$

$$=(0,2\sqrt{3},0)+\alpha\cdot(\underline{w}-\underline{u})+\beta\cdot(\underline{v}-\underline{u})=$$
$$=(0,2\sqrt{3},0)+\alpha\cdot(3,3\sqrt{3},0)+\beta\cdot(6,0,0)=$$
$$=(0,2\sqrt{3},0)+t\cdot(1,\sqrt{3},0)+r\cdot(1,0,0)$$

נסמן ב- $Ax+By+Cz+D=0$ את משוואת המישור ABC.

ואז:
$$\begin{cases}(A,B,C)\cdot(1,\sqrt{3},0)=0 \ \Rightarrow\ A+\sqrt{3}B=0\\ (A,B,C)\cdot(1,0,0)=0 \ \Rightarrow\ A=0 \ \Rightarrow\ B=0\end{cases}$$

כלומר משוואת ABC היא $Cz+D=0$. נציב את שיעורי הנקודה C ונקבל $D=0$. מכאן, משוואת המישור ABC : $z=0$.

ג) הזווית בין המישור π $(ax^2+bx+cz+d=0)$ למישור ABC היא בת $30°$, לכן:
$$\cos 30°=\frac{(a,b,c)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot 1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \ \Rightarrow\ 3(a^2+b^2+c^2)=4c^2 \quad ①$$

$AB \parallel \pi$, מכאן: $(a,b,c)\cdot(1,0,0)=0 \ \Rightarrow\ a=0 \quad ②$

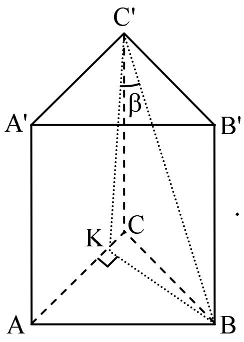
$C\in\pi$, מכאן: $0\cdot a+2\sqrt{3}b+0\cdot c+d=0 \ \Rightarrow\ 2\sqrt{3}b+d=0 \quad ③$

לפי ① : $3b^2+3c^2=4c^2 \ \Rightarrow\ 3b^2=c^2 \ \Rightarrow\ b=\pm\frac{c}{\sqrt{3}}$

לפי ③ : $2\sqrt{3}\cdot\left(\pm\frac{c}{\sqrt{3}}\right)+d=0 \ \Rightarrow\ d=\mp 2c$

משוואת המישור π : $y-\sqrt{3}z-2\sqrt{3}=0$

או: $y+\sqrt{3}z-2\sqrt{3}=0$



(3) נתון : $AB = BC = CA = A'B' = B'C' = A'C' = a$

(א) נקבע את הזווית β , הזווית בין האלכסון BC' לבין המישור $ACC'A'$.

מנקודה B מעבירים אנך BK לצלע AC ב- ΔABC .

$C'K$ הוא היטל המשופע $C'B$ על המישור $ACC'A'$,

לכן $\measuredangle KC'B = \beta$ (זווית בין משופע לבין היטלו על המישור).

$AA' \perp ABC$, לכן $AA' \perp BK$.

$AC \perp BK$ (לפי הבנייה), לכן $BK \perp ACC'A'$, כי BK מאונך לשני ישרים לא מקבילים במישור זה, לכן $BK \perp C'K$

ו- $\Delta BC'K$ הוא משולש ישר-זווית ($\measuredangle C'KB = 90°$).

נסמן : $AA' = BB' = CC' = h$ ונבטא את h באמצעות a ו- β .

ב- ΔABC : BK הוא גובה במשולש שווה-צלעות, לכן : $BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

ב- $\Delta C'KB$: $\sin\beta = \frac{BK}{BC'} \Rightarrow BC' = \frac{BK}{\sin\beta} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin\beta}$

ב- $\Delta BCC'$: $BC'^2 = BC^2 + CC'^2 \Rightarrow \frac{3a^2}{4\sin^2\beta} = a^2 + CC'^2$

$$CC'^2 = h^2 = \frac{3a^2}{4\sin^2\beta} - a^2$$

$$h = a\sqrt{\frac{3}{4\sin^2\beta} - 1} = \frac{a}{2\sin\beta}\sqrt{3 - 4\sin^2\beta}$$

$$V = S_{\Delta ABC} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2\sin\beta}\sqrt{3 - 4\sin^2\beta} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8\sin\beta}\sqrt{3 - 4\sin^2\beta}$$

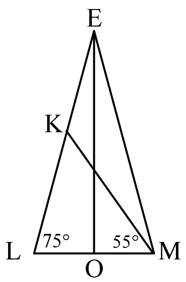
המשך בעמוד הבא ⮜⮜⮜

(ב) בריבוע הבסיס ABCD , הקטע LM עובר דרך נקודת חיתוך האלכסונים,
כלומר דרך מרכז המעגל החוסם את הבסיס ABCD (נסמנו ב- O).
מכאן שעקב גובה הפירמידה נמצא על הקטע LM
והעקב של EL על מישור ABCD נמצא גם כן על הקטע LM .
במשולש שווה-שוקיים EDC : EL הוא תיכון לבסיס,
אז הוא גם גובה לבסיס, כלומר: $EL \perp DC$.
BCLM מקבילית ($CL \parallel BM$, $CL = BM$),
לכן $\measuredangle CLM + \measuredangle LCB = 180°$, ומכאן: $ML \perp CD$.
לפי ההגדרה, $\measuredangle ELM$ היא הזווית בין הפאה הצדדית EDC
והמישור ABCD , לכן $\measuredangle ELM = 75°$.
ההיטל של KM נמצא על LM , $LM \perp BA$, לכן לפי המשפט על שלושה
אנכים, גם $KM \perp BA$ ולפי הגדרה, $\measuredangle KML$ היא הזווית בין המישורים
GFBA ו- ABCD : $\measuredangle KML = 55°$.

$$EO \perp ABCD \quad \Rightarrow \quad EO \perp LM \ , \ EO = 3.85 \text{ ס"מ}$$

ב- ΔLEO :

$$\tan \measuredangle L = \frac{EO}{LO} \quad \Rightarrow \quad LO = \frac{EO}{\tan \measuredangle L} = \frac{3.85}{\tan 75°}$$



במשולש שווה-שוקיים ELM ,
הגובה EO לבסיס LM
הוא גם תיכון לבסיס, לכן:

$$LM = 2 \cdot LO = 2 \cdot \frac{3.85}{\tan 75°} = \frac{7.7}{\tan 75°}$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔKLM :

$$\frac{LM}{\sin \measuredangle K} = \frac{KL}{\sin \measuredangle M}$$

$$\frac{7.7}{\tan 75° \cdot \sin(180° - 75° - 55°)} = \frac{KL}{\sin 55°}$$

$$KL = \frac{7.7 \cdot \sin 55°}{\tan 75° \cdot \sin 50} \approx 2.21 \text{ ס"מ}$$

(4) (א) תחום הגדרה: $e^{-x} > 0$ לכל x , לכן תחום ההגדרה הוא: כל x .

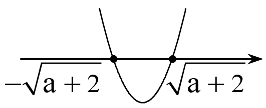
(ב) תנאי הכרחי לקיום נקודת קיצון: $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{(2x-2)\,e^{-x} - (-e^{-x})\,(x^2 - 2x - \mathrm{a})}{e^{-2x}} = 0$$

$$2x - 2 + x^2 - 2x - \mathrm{a} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x^2 = \mathrm{a} + 2$$

למשוואה זו יש שני פתרונות, כלומר לפונקציה יש שתי נקודות חשודות

לקיצון, רק בתנאי ש- $\mathrm{a} > -2 \;\;\Leftarrow\;\; \mathrm{a} + 2 > 0$.



במקרה זה: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\mathrm{a}+2}$.

בנקודה שבה $x = -\sqrt{\mathrm{a}+2}$ יש נקודת מקסימום

(הנגזרת משנה סימן מ- + ל- −),

בנקודה שבה $x = \sqrt{\mathrm{a}+2}$ יש נקודת מינימום.

(הנגזרת משנה סימן מ- − ל- +).

(ג) המרחק בין שני ישרים המאונכים לציר ה- x הוא: $|\,x_1 - x_2\,|$

$$\sqrt{\mathrm{a}+2} - (-\sqrt{\mathrm{a}+2}) = 8 \;\;\Rightarrow\;\; 2\sqrt{\mathrm{a}+2} = 8$$

$$\sqrt{\mathrm{a}+2} = 4 \;\;\Rightarrow\;\; \mathrm{a}+2 = 16 \;\;\Rightarrow\;\; \mathrm{a} = 14$$

(ד) לפי סעיף (ב):

$$x = 4 \;\;\Rightarrow\;\; y = \frac{16-8-14}{e^{-4}} = -6e^4 \;\;\Rightarrow\;\; \min(4, -6e^4)$$

$$x = -4 \;\;\Rightarrow\;\; y = \frac{16+8-14}{e^4} = \frac{10}{e^4} \;\;\Rightarrow\;\; \max(-4, \frac{10}{e^4})$$

(ה) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$$x = 0 \;\;\Rightarrow\;\; y = \frac{0-0-14}{e^0} = -14 \;\;\Rightarrow\;\; (0, -14)$$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

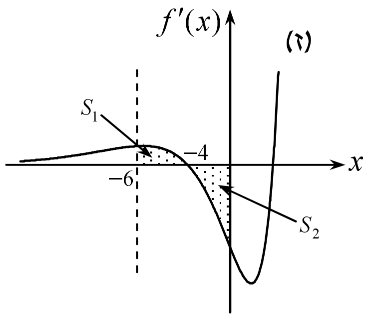
$$y = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x^2 - 2x - 14 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{15}$$

כלומר: $(4.87, 0)$, $(-2.87, 0)$

(ו) ראו פתרון בספר הבחינות, בעמוד **166** .

המשך בעמוד הבא >>>

(ז)



$$\int f'(x)\,dx = f(x) + \mathrm{C} = \frac{x^2-2x-14}{e^{-x}} + \mathrm{C}$$

$$S_1 = \int_{-6}^{-4} f'(x)\,dx = \left(\frac{x^2-2x-14}{e^{-x}}\right)\Bigg|_{-6}^{-4} =$$

$$= \text{יחידות שטח } \left(\frac{10}{e^4} - \frac{34}{e^6}\right)$$

$$S_2 = -\int_{-4}^{0} f'(x)\,dx = \left(-\frac{x^2-2x-14}{e^{-x}}\right)\Bigg|_{-4}^{0} = \text{יחידות שטח } 14 + \frac{10}{e^4}$$

$$S_{\text{מבוקש}} = S_1 + S_2 = \frac{10}{e^4} - \frac{34}{e^6} + 14 + \frac{10}{e^4} = \text{יחידות שטח } \left(14 + \frac{20}{e^4} - \frac{34}{e^6}\right)$$

(5) (א) נמצא מתי הפונקציה מקבלת את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר בתחום הנתון.

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln \mathrm{b}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x\ln \mathrm{b}} = 0$$

ולמשוואה זו אין פתרון, כי המונה לא יכול להיות שווה ל- 0 .

$$x > 0 \ , \ 0 < \mathrm{b} < 1 \quad \Rightarrow \quad \ln \mathrm{b} < 0$$

מכאן ש- $\frac{1}{x\ln \mathrm{b}} = f'(x) < 0$ בכל התחום הנתון,

כלומר הפונקציה יורדת בתחום הנתון ומקבלת את הערך המקסימלי בקצה השמאלי של תחום ההגדרה, ואת הערך המינימלי הפונקציה מקבלת בקצה הימני של התחום:

$$\begin{cases} f(2) = 6 \\ f(4) = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad -\begin{cases} \log_{\mathrm{b}} 2\mathrm{a} = 6 \\ \log_{\mathrm{b}} 4\mathrm{a} = 4 \end{cases}$$

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

$$\log_b \tfrac{1}{2} = 2 \;\Rightarrow\; b^2 = \tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; b = \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2} \;,\; b > 0 \;\Rightarrow\; b = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b^6 = 2a \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{8} = 2a \;\Rightarrow\; a = \tfrac{1}{16}$$

(ב) תחום ההגדרה: $\frac{4x-x^2}{\tan x} > 0 \;\Rightarrow\; 4x - x^2 > 0 \;\Rightarrow\; 0 < x < 4$

$$\begin{cases} 0 < x < 4 \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \;\Rightarrow\; 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x \cdot \ln a} + \frac{\tan x}{(4x-x^2)\cdot \ln a} \cdot \left(\frac{4x-x^2}{\tan x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sin x \cdot \cos x \cdot \ln a} + \frac{\tan x}{(4x-x^2)\cdot \ln a} \cdot \frac{(4-2x)\cdot \tan x - \frac{1}{\cos^2 x}(4x-x^2)}{(\tan x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\ln a}\left[\frac{1}{\sin x \cdot \cos x} + \frac{\tan x}{(4x-x^2)} \cdot \frac{(4-2x)\cdot \sin x \cdot \cos x - (4x-x^2)}{(\sin x)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\ln a}\left[\frac{1}{\sin x \cdot \cos x} + \frac{(4-2x)\cdot \sin x \cdot \cos x - (4x-x^2)}{(4x-x^2)\cdot \sin x \cdot \cos x}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sin x \cdot \cos x \cdot \ln a}\left[1 + \frac{(2-x)\cdot \sin 2x - 4x + x^2}{4x-x^2}\right] =$$

$$= \frac{2}{\sin 2x \cdot \ln a} \cdot \frac{4x - x^2 + (2-x)\cdot \sin 2x - 4x + x^2}{4x-x^2} =$$

$$= \frac{2\,(2-x)\cdot \sin 2x}{\sin 2x \cdot \ln a \cdot (4x-x^2)} = \frac{2\,(2-x)}{\ln a \cdot (4x-x^2)}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2\,(2-x)}{\ln a \cdot (4x-x^2)} = 0 \;\Rightarrow\; 2(2-x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$$

אבל $\frac{3.1416}{2} \approx \frac{\pi}{2} < 2$, כלומר נקודה זו אינה שייכת לתחום ההגדרה,

לתחום ההגדרה אין "קצוות", לכן לפונקציה הנתונה אין נקודות קיצון.

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות