פתרון מבחן מס' 25 (ספר מבחנים – שאלון 035806)

(1) נסמן ב- x קמ"ש את מהירות המכונית לפני התקלה,

ואז $(x-20)$ קמ"ש היא מהירות המכונית מהמוסך לעיר B.

נתון:

$$T_{\text{בפועל}} = T_{\text{מתוכנן}} + \frac{3}{2}$$

$$T_{\text{מתוכנן}} = \frac{S}{V} = \frac{240}{x}$$

$$T_{\text{בפועל}} = \underbrace{2}_{\text{משך הנסיעה עד התקלה}} + \underbrace{\frac{20}{60}}_{\text{זמן החזרה למוסך}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{משך התיקון}} + \underbrace{\frac{240-2x+20}{x-20}}_{\text{משך הנסיעה מהמוסך ל-B}}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{240}{x} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{260-2x}{x-20}$$

$$\frac{240}{x} = \frac{4}{3} + \frac{260-2x}{x-20} \quad / \cdot 3x(x-20)$$

$$720(x-20) = 4x(x-20) + 3x(260-2x)$$

$$720x - 14,400 = 4x^2 - 80x + 780x - 6x^2$$

$$2x^2 + 20x - 14,400 = 0 \quad /:2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 10x - 7,200 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm 170}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 80 \ , \ x_2 = -90$$

הפתרון $x_2 = -90$ נפסל, כי מהירות היא גודל חיובי.

תשובה: המכונית נסעה במהירות של 80 קמ"ש עד התקלה.

(2) סדרה חשבונית:

$$\{a_n\} \quad a_1 = d \ , \ a_n \neq 0$$

$$\{b_n\} \quad b_1 = a_1 = d$$

$$b_2 = a_8 t = t(a_1 + 7d) = t(d + 7d) = 8td$$

$$b_3 = t^2 a_{28} = t^2(a_1 + 27d) = 28t^2 d$$

$$\{c_n\} \quad c_1 = 8t \cdot a_2 = 8t(a_1 + d) = 16td$$

$$c_2 = 25a_9 = 25(a_1 + 8d) = 225d$$

$$c_3 = (4t+32)a_{13} = (4t+32)(a_1 + 12d) = 52d(t+8)$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(א) אם b_n היא סדרה חשבונית, אז:

$$b_2 - b_1 = b_3 - b_2 \quad \Rightarrow \quad 2b_2 = b_1 + b_3$$

$$2 \cdot 8td = d + 28t^2 d \quad / : d \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 28t^2 - 16t + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{16 \pm 12}{56} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{1}{2} \ , \ t_2 = \frac{1}{14}$$

אם c_n היא סדרה חשבונית, אז:

$$c_2 - c_1 = c_3 - c_2 \quad \Rightarrow \quad 2c_2 = c_1 + c_3$$

$$2 \cdot 225d = 16td + 52d(t+8) \quad / : d \neq 0$$

$$450 = 16t + 52t + 416 \quad \Rightarrow \quad 68t = 34 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2}$$

כדי ששתי הסדרות החדשות c_n , b_n יהיו סדרות חשבוניות, נדרוש:

$t = \frac{1}{2}$ וגם $t_2 = \frac{1}{14}$, $t_1 = \frac{1}{2}$, כלומר: $t = \frac{1}{2}$.

(ב) עבור $t = \frac{1}{2}$:

$$b_1 = d \ , \ D_b = b_2 - b_1 = 4d - d = 3d$$

$$T_k = [2b_1 + D_b(k-1)] \cdot \frac{k}{2} =$$

$$= [2d + 3d(k-1)] \cdot \frac{k}{2} = d \cdot (3k-1) \cdot \frac{k}{2}$$

$$c_1 = 8d \ , \ D_c = c_2 - c_1 = 225d - 8d = 217d$$

$$U_k = [2c_1 + D_c(k-1)] \cdot \frac{k}{2} =$$

$$= [16d + 217d(k-1)] \cdot \frac{k}{2} = d \cdot (217k - 201) \cdot \frac{k}{2}$$

$$U_k = 72 \cdot T_k \quad \Rightarrow \quad d \cdot (217k - 201) \cdot \frac{k}{2} = 72d \cdot (3k-1) \cdot \frac{k}{2}$$

$$217k - 201 = 72(3k-1)$$

$$217k - 201 = 216k - 72 \quad \Rightarrow \quad k = 129$$

(3) $P(B)=\frac{20+20}{20+20+40}=\frac{1}{2}\ ,\ P(A/B)=\frac{32}{40}=0.8$

נבנה טבלת הסתברויות:

	B	$\bar{\mathbf{B}}$	**סך הכול**
A	0.4		
$\bar{\mathbf{A}}$	0.1		
סך הכול	0.5	0.5	1

$$P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\quad\Rightarrow\quad 0.8=\frac{P(A\cap B)}{0.5}\quad\Rightarrow\quad P(A\cap B)=0.4$$

$$P(\bar{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0.5-0.4=0.1$$

נסמן: $N(\bar{A}\cap\bar{B})=a$ ונבנה טבלת שכיחויות:

	B	$\bar{\mathbf{B}}$	**סך הכול**
A	32	$40-a$	$72-a$
$\bar{\mathbf{A}}$	8	a	$8+a$
סך הכול	40	40	80

(א) המאורעות A ו- B הם מאורעות בלתי-תלויים, לכן:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

$$0.4=P(A)\cdot 0.5\quad\Rightarrow\quad P(A)=0.8\quad\Rightarrow\quad\frac{72-a}{80}=0.8\quad\Rightarrow\quad a=8$$

(ב) $P(A/B)>P(A/\bar{B})\quad\Rightarrow\quad\frac{P(A\cap B)}{P(B)}>\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}$

$$\frac{32}{40}>\frac{40-a}{40}\quad\Rightarrow\quad 8<a<40\ ,\ a\in\mathbb{N}$$

(ג) $P(A/B)<P(A/\bar{B})\quad\Rightarrow\quad 0<a<8\ ,\ a\in\mathbb{N}$

(4) (א) $\measuredangle AMN = \frac{1}{2} \cdot \widehat{MN}$, $\measuredangle BNM = \frac{1}{2} \cdot \widehat{MN}$

(זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית
הנשענת על מיתר זה מצידו השני, כלומר שווה למחצית ערך הקשת)

$\Downarrow$

$\measuredangle AMN = \measuredangle BNM = \alpha$ (שני גדלים השווים לגודל שלישי, שווים ביניהם, סימון)

$\measuredangle MAB = \measuredangle ABN = \beta$ (בטרפז שווה-שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו)

$\alpha + \beta + \beta + \alpha = 360°$ (סכום זוויות במרובע ABNM שווה ל- 360°)

$\alpha + \beta = 180°$ (אלגברה)

$\Downarrow$

$\measuredangle BAM + \measuredangle AMN = 180°$ (הצבה)

$\Downarrow$

$AB \parallel NM$ (אם סכום זוויות חד-צדדיות בין שני ישרים וחותך MA שווה ל- 180° , אזי הישרים מקבילים).

(ב) $\measuredangle AMN = \measuredangle BNM$ (הוכחנו בסעיף (א))

$\Downarrow$

ABNM טרפז-שווה-שוקיים

$\Downarrow$

$AM = BN$

נסמן ב- K את נקודת ההשקה של AB למעגל, מכאן:

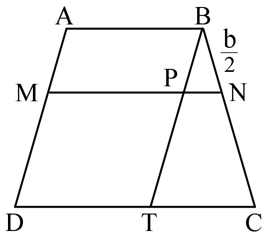
$AK = AM$, $BK = BN$ (שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה אחת, שווים זה לזה)

$AB = b = AK + KB = 2 \cdot BN$ (חיבור קטעים, הצבה)

המשך בעמוד הבא ▶▶▶

$BN = KB = KA = AM = \frac{b}{2}$

$AB + DC = AD + BC$ (סכומי אורכי שתי צלעות נגדיות במרובע החוסם מעגל, שווים זה לזה)



$b + a = 2 \cdot BC$

$BC = AD = \frac{a+b}{2}$

נעביר $BT \parallel AD$.

$PN \parallel TC$

$\Downarrow$

$\Delta BPN \sim \Delta BTC$ (לפי משפט דמיון ז.ז.)

$\Downarrow$

$\frac{PN}{TC} = \frac{BN}{BC}$ (פרופורציית צלעות במשולשים דומים)

$$\frac{PN}{a-b} = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a+b}{2}} = \frac{b}{a+b} \quad \Rightarrow \quad PN = \frac{ab-b^2}{a+b}$$

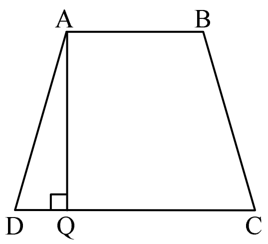
ABPM מקבילית (מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות זו לזו, הוא מקבילית)

$\Downarrow$

$MP = AB = b$

$\Downarrow$

$$MN = MP + PN = b + \frac{ab-b^2}{a+b} = \frac{ab+b^2+ab-b^2}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$$



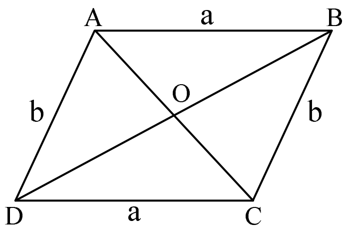
(ג) נעביר $AQ \perp DC$. $DQ = \frac{a-b}{2}$.

לפי משפט פיתגורס ב- ΔADQ :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = (2R)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 16R^2 + a^2 - 2ab + b^2$$

$$16R^2 = 4ab \quad \Rightarrow \quad R^2 = \frac{ab}{4} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\sqrt{ab}}{2}$$



(5) (א) נסמן $\sphericalangle ABC = \alpha$,

ואז $\sphericalangle DAB = 180° - \alpha$

(סכום שתי זוויות סמוכות במקבילית

שווה ל- $180°$).

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔABC : ① $y^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔDAB :

② $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$

נחבר אגפים מתאימים במשוואות ② , ① ונקבל:

$$x^2 + y^2 = 2a^2 + 2b^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2 + b^2} = 2$$

(ב) לפי התוצאה של סעיף (א) : $\frac{x^2 + 7^2}{6^2 + 5^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 49 = 122$

$$x^2 = 73 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{73}$$

x הוא גודל חיובי, לכן: $x = \sqrt{73}$.

אלכסונים במקבילית חוצים זה את זה, לכן: $AO = \frac{1}{2}y =$ 3.5 ס"מ

$BO = \frac{1}{2}x =$ $\frac{\sqrt{73}}{2}$ ס"מ

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔAOB :

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos\sphericalangle O$$

$$36 = 12.25 + 18.25 - \frac{7\sqrt{73}}{2}\cos\sphericalangle O$$

$$\cos\sphericalangle O = -0.184 \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle O \approx 100.6°$$

תשובה:

הזוויות בין אלכסוני המקבילית הן $100.6°$ או $180° - 100.6° = 79.4°$.

(6) (א)

$$y' = \frac{(4-2x)(x^2-5x+A)-(2x-5)(4x-x^2)}{(x^2-5x+A)^2}$$

$$y'(0)=1 \;\Rightarrow\; \frac{4\cdot A-0}{A^2}=1 \;\Rightarrow\; \frac{4}{A}=1 \;\Rightarrow\; A=4$$

כלומר: $y=\frac{4x-x^2}{x^2-5x+4}=\frac{x(4-x)}{(x-4)(x-1)}$.

(ב) תחום הגדרה: $(x-4)(x-1)\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq 1\,,\,4$

עבור $x\neq 1\,,\,4$ נקבל: $y=\frac{x(4-x)}{(x-4)(x-1)}=-\frac{x}{x-1}=\frac{x}{1-x}$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$$x=0 \;\Rightarrow\; y=0 \;\Rightarrow\; (0,0)$$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$y=0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{1-x}=0 \;\Rightarrow\; y=0 \;\Rightarrow\; (0,0)$$

תחומי עלייה וירידה:

לכל $x\neq 1\,,\,4$ מתקיים: $y'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}>0$

לכן גרף הפונקציה עולה עבור $x>4$, $1<x<4$, $x<1$.

לגרף הפונקציה אין נקודות קיצון.

משוואות אסימפטוטות אנכיות: $\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty \;\Rightarrow\; x=1$

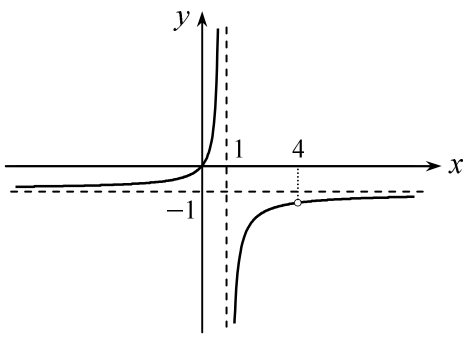
בנקודה שבה $x=4$ יש לגרף הפונקציה "חור":

$$\lim_{x\to 4}\frac{x}{1-x}=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3} \;\Rightarrow\; \left(4,-\frac{4}{3}\right)$$

משוואות אסימפטוטות אופקיות:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-1}=\frac{1}{0-1}=-1 \;\Rightarrow\; y=-1$$

ראו סרטוט משמאל.



(7) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin^3 x}$

תחום ההגדרה של הפונקציה:

$$\sin^3 x\neq 0 \;\Rightarrow\; \sin x\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq \pi n \;,\; n\in\mathbb{Z}$$

בתחום הנתון אין נקודות כאלה, לכן תחום ההגדרה הוא $0<x\leq\frac{\pi}{2}$.

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$f(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{\cos x}{\sin^3 x}=0 \;\Rightarrow\; \cos x=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k \;,\; k\in\mathbb{Z}$$

בתחום הנתון:
$$x=\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; A\left(\frac{\pi}{2},0\right)$$

(א) לפי הנתון:
$$S=1.5 \;\Rightarrow\; \int_a^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx=1.5$$

נסמן:
$$\sin x=t \;\Rightarrow\; dt=\cos x dx$$

$$\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{2t^2}=-\frac{1}{2\sin^2 x}$$

$$\left(-\frac{1}{2\sin^2 x}\right)\Bigg|_a^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{\sin^2 a}\right)=\frac{1-\sin^2 a}{2\sin^2 a}=\frac{\cos^2 a}{2\sin^2 a}=\frac{ctg^2 a}{2}$$

$$\frac{ctg^2 a}{2}=\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; ctg^2 a=3 \;\Rightarrow\; ctg\, a=\pm\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \tan a=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

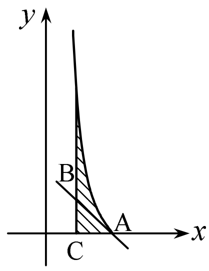
$$a_1=\frac{\pi}{6}+\pi n \;,\; n\in\mathbb{Z}$$

$$a_2=-\frac{\pi}{6}+\pi k \;,\; k\in\mathbb{Z}$$

נתון כי $0<a<\frac{\pi}{2}$, לכן: $a=\frac{\pi}{6}$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ב)



$$f'(x)=\frac{-\sin x\cdot\sin^3 x-3\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\sin^6 x}=$$

$$=\frac{-\sin^2 x-3\cos^2 x}{\sin^4 x}=-\frac{\sin^2 x+3\cos^2 x}{\sin^4 x}$$

$$m_A=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1+3\cdot 0}{1}=-1$$

משוואת המשיק: $y=-1\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\ \Rightarrow\ y=-x+\frac{\pi}{2}$

שיעורי נקודת החיתוך של המשיק עם הישר $x=\frac{\pi}{6}$ (הנקודה B):

$$x=\frac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ y=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}\ \Rightarrow\ B\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$$

$$S_{\text{מקווקו}}=S_{\text{סעיף א'}}-S_{\Delta ABC}=\frac{3}{2}-\frac{BC\cdot AC}{2}=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{3}{2}-\frac{\pi^2}{18}\approx 0.952$$ יחידות שטח

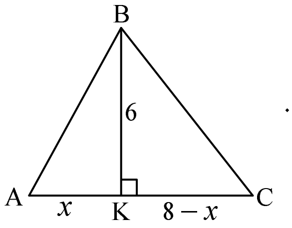
(ג)

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} g'(x)dx=\frac{1}{3}\left(1-\frac{\pi}{6}\right)\ \Rightarrow\ g(x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{6-\pi}{18}\ \Rightarrow\ \frac{1}{3}-g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{18}$$

מכאן: $g(a)=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{18}$

(8) נתון: $BK\perp AC$, $BK=6$ ס"מ , $AC=8$ ס"מ .



(א) נסמן: $AK=x$ ס"מ ,

מכאן: $KC=(8-x)$ ס"מ .

לפי משפט פיתגורס ב- ΔABK : $AB=\sqrt{x^2+36}$ ס"מ

לפי משפט פיתגורס ב- ΔBCK :

$$BC=\sqrt{36+(8-x)^2}=\sqrt{x^2-16x+100}$$ ס"מ

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

פונקציית המטרה:

$$P(x) = P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = \sqrt{x^2+36} + \sqrt{x^2-16x+100} + 8$$

$$P'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+36}} + \frac{2x-16}{2\sqrt{x^2-16x+100}}$$

$$P'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+36}} = \frac{8-x}{\sqrt{x^2-16x+100}}$$

$0 < x < 8$, לכן:

$$x^2(x^2-16x+100) = (x^2+36)(8-x)^2$$

$$x^2(x^2-16x+64) + 36x^2 = x^2(x^2-16x+64) + {} + 36(x^2-16x+64)$$

$$36x^2 = 36x^2 + 36(64-16x) \quad \Rightarrow \quad 64-16x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

x	x = 0	0 < x < 4	x = 4	4 < x < 8	x = 8
P′(x)	תחום אי-הגדרה	−	0	+	תחום אי-הגדרה
P(x)		↘	min	↗	

$$P'(1) = \frac{1}{\sqrt{37}} - \frac{7}{\sqrt{85}} \approx -0.59 < 0$$

$$P'(5) = \frac{5}{\sqrt{61}} - \frac{3}{\sqrt{45}} \approx 0.19 > 0$$

תשובה: היקף המשולש מינימלי כאשר $x = 4$.

צלעות המשולש:

$AB = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} =$ ס"מ $2\sqrt{13}$

$BC = \sqrt{36+(8-4)^2} = \sqrt{52} =$ ס"מ $2\sqrt{13}$

(ב) המשולש הוא שווה-שוקיים ($AB = BC$).

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות