

## פתרונות מבחן מס' 22 (ספר מבחנים – שאלון 035806)

(1) נסמן ב- A קמ"ש את מהירותו של הרוכב שי יצא ממושב A, ב- B קמ"ש את מהירותו של הרוכב שי יצא ממושב B, וב- S ק"מ את המרחק בין A ל- B.

הפגישה התרחשה t שעות לאחר יציאת הרוכב מ- B ביום אחד, ו- T שעות לאחר יציאת הרוכב מ- A ביום אחר.

(א) ביום אחד, הרוכב מ- A עבר מרחק גדול פי 2 מאשר הרוכב מ- B,

$$\textcircled{1} \quad x\left(t + \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot t y \quad \text{לכן:}$$

$$\textcircled{2} \quad 3t y = S \quad \text{בנקודת הפגישה:}$$

$$\textcircled{3} \quad xT = y\left(T + \frac{1}{2}\right) \quad \text{ביום השני, הרוכבים עברו מרחקים שווים, לכן:}$$

$$\textcircled{4} \quad 2xT = S \quad \text{בנקודת הפגישה:}$$

$$3t y = 2xT \Rightarrow T = \frac{3ty}{2x} \quad \text{משמעות \textcircled{2}, \textcircled{4} קיבל:}$$

$$x \cdot \frac{3ty}{2x} = y \cdot \left(\frac{3ty}{2x} + \frac{1}{2}\right) / \cdot \frac{2x}{y} \quad \text{נציב במשוואות \textcircled{3} ונקבל:}$$

$$3tx = 3ty + x \Rightarrow t = \frac{x}{3(x-y)} \quad \textcircled{5}$$

נציב את \textcircled{5} במשוואת \textcircled{1} ונקבל:

$$x \left[ \frac{x}{3(x-y)} + \frac{1}{2} \right] = 2 \cdot \frac{xy}{3(x-y)} / \cdot \frac{6(x-y)}{x}$$

$$2x + 3(x-y) = 4y \Rightarrow 2x + 3x - 3y = 4y \Rightarrow 5x = 7y$$

$$\cdot \frac{x}{y} = \frac{7}{5} \quad \text{יחס המהירות בין הרוכב הראשון לרוכב השני הוא}$$

$$(b) \quad \text{שני הרוכבים יפגשו אחרי זמן: } K = \frac{S}{x+y} = \frac{S}{x + \frac{5x}{7}} = \frac{7S}{12x}$$

לפי הנתון, הרוכב מ- A יעבור  $\left(\frac{1}{2}S + b\right)$  ק"מ, לכן:

$$\frac{7S}{12x} \cdot x = \frac{S}{2} + b \Rightarrow \frac{7S}{12} = \frac{S}{2} + b \Rightarrow \frac{S}{12} = b \Rightarrow S = 12b$$

$$\begin{aligned}
 a_n + a_k &= [a_1 + d(n-1)] + [a_1 + d(k-1)] = && (i) \quad (ii) \quad (iii) \\
 &= a_1 + d(n+k-2) + a_1 = \\
 &= a_1 + d(n+k-2) + md = a_1 + d(n+k+m-2) \\
 a_p = a_n + a_k &\Rightarrow a_1 + d(p-1) = a_1 + d(n+k+m-2) && (ii) \\
 p-1 = n+k+m-2 &\Rightarrow p = n+k+m-1 \\
 a_{25} \Rightarrow n &= 25, a_{35} \Rightarrow k = 35 && (iv) \\
 a_{25} + a_{35} &= a_1 + d(25+35+m-2) = a_1 + d(58+m) \\
 a_{25} + a_{35} &= a_{67} && \text{נתון : } (v) \\
 67 = 25 + 35 + m - 1 &\Rightarrow m = 8 && \text{לפי סעיף (ii) נקבע :} \\
 S_{75} = 6,750 &\Rightarrow (2a_1 + d \cdot 74) \cdot \frac{75}{2} = 6,750 \\
 2 \cdot 8d + 74d &= 180 \Rightarrow 90d = 180 \Rightarrow d = 2 \\
 a_1 = md &= 8 \cdot 2 = 16 && \text{מכאן :}
 \end{aligned}$$

(3) לפי הנתון :

$$\textcircled{1} \ N(\bar{B} \cap \bar{A}) = 40, \textcircled{2} \ P(A) = 0.6, \textcircled{3} \ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

נסמן ב-  $x_1$  את ממוצע הגילים של הצעיריים,ב-  $x_2$  את ממוצע הגילים של המבוגרים,ב-  $N_1$  את מספר הצעיריים וב-  $N_2$  את מספר המבוגרים.

$$x_1 = 28, x_2 = 42 \Rightarrow \frac{28N_1 + 42N_2}{N_1 + N_2} = 33.6 \quad \textcircled{4}$$

נשלים את טבלת השכיחויות :

קבוצת גיל			טבלת שכיחויות	
סה"כ	$\bar{B}$ : מבוגרים	עיראים : B	הכנסה	
$0.6N$	$0.4N - 40$	$40 + 0.2N$	: גבוהה A	הכנסה
$0.4N$	40	$0.4N - 40$	: נמוכה $\bar{A}$	
$N$	0.4N	0.6N	סה"כ	

המשך בעמוד הבא ►►

$$28N_1 + 42N_2 = 33.6N_1 + 33.6N_2 \quad \text{לפי ④ :}$$

$$8.4N_2 = 5.6N_1 \Rightarrow N_1 = 1.5N_2 \quad ⑤$$

$$N_1 + N_2 = N \Rightarrow 2.5N_2 = N$$

$$N_2 = 0.4N \Rightarrow N_1 = 0.6N$$

$$N(A) = 0.6N, N(\bar{A}) = N - 0.6N = 0.4N$$

$$N(A \cap \bar{B}) = 0.4N - 40, N(B \cap \bar{A}) = 0.4N - 40$$

$$N(A \cap B) = 0.6N - (0.4N - 40) = 40 + 0.2N$$

$$\frac{40 + 0.2N}{N} = \frac{0.6N}{N} \cdot \frac{0.6N}{N} \quad \text{לפי ③ :}$$

$$\frac{40 + 0.2N}{N} = 0.36 \Rightarrow 40 + 0.2N = 0.36N$$

$$0.16N = 40 \Rightarrow N = 250$$

$$P(B / \bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{N(\bar{A} \cap B)}{N(\bar{A})} = \frac{0.4N - 40}{0.4N} = \frac{0.4 \cdot 250 - 40}{0.4 \cdot 250} = \frac{60}{100} = 0.6$$

**תשובה:** שיעור המנויים הצעירים מתוך קבוצת המנויים בעלי הכנסה נמוכה הוא 60%.

$$BS \parallel PC \quad \nexists \text{BSP} = \nexists \text{SPC} \quad \text{(א) (4)}$$

זווית מתחלפות בין מקבילים וחותך SP שווה זו לו

$$\nexists \text{APC} = \nexists \text{ABC} = 60^\circ \quad \text{(במשולש שווה-צלעות כל זווית היא בת } 60^\circ)$$

זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת  $\widehat{AC}$

שווה זו לו

$$\nexists \text{BSP} = 60^\circ \quad \text{(הצבה)}$$

$$\nexists \text{BPA} = \nexists \text{BCA} = 60^\circ \quad \text{(במשולש שווה-צלעות כל זווית היא בת } 60^\circ)$$

זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת  $\widehat{AB}$

שווה זו לו

$$(סכום זווית במשולש BPS שווה ל- ) 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ \quad \nexists \text{SBP} = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$$



המשך בעמוד הבא <<>

$$\angle BSP = \angle SPB = \angle SBP = 60^\circ$$



שווה-צלעות (במשולש מול זווית שווה מונחות צלעות  $\Delta$  BSP)

שווה, לנ:  $BP = PS = BS$ . מ.ש.ל. (א)

(ב)  $\angle BNC = \angle BAC = 60^\circ$  (במשולש שווה-צלעות כל זווית היא בת  $60^\circ$ )  
זוויות היקפות הנשענות על אותה קשת  $\widehat{BC}$

שווה זו זו (זווית)



$$\angle BNC = \angle BSP$$



(אם זוויות מתאימות בין ישרים וחותך שוות,  $NC \parallel SP$

או השרים מקבילים).



$$NC \parallel AP$$

מ.ש.ל. (ב)

(ג) טרפז  $ANCP$ , הוכחנו בסעיף (ב)

(סכום זווית חד-צדדיות בין מקבילים וחותך  $\angle A + \angle N = 180^\circ$   
שווה ל-  $180^\circ$ )

(אם מרובע חסום במעגל, או סכום זווית  
נגדירות שווה ל-  $180^\circ$ )

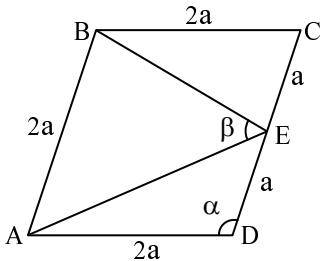


$$\angle N = \angle C \quad (\text{כלל המעבר})$$



טרפז שווה-שוקיים (אם זווית הבסיס בטרפז שווה,  
או הטרפז הוא שווה-שוקיים).

מ.ש.ל. (ג)



(5) נתון:  $CE = ED = a$

. לכן אורך צלע המעוין שווה ל-  $2a$

:  $\Delta ADE$  משפט הקוסינוסים ב-

$$AE^2 = AD^2 + ED^2 - 2 \cdot AD \cdot ED \cdot \cos \alpha$$

$$AE^2 = 4a^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cos \alpha$$

$$AE^2 = a^2 (5 - 4 \cos \alpha)$$

:  $\Delta BCE$  משפט הקוסינוסים ב-

$$BE^2 = BC^2 + CE^2 - 2 \cdot BC \cdot CE \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$BE^2 = 2a^2 + a^2 + 2 \cdot 2a \cdot a \cos \alpha \Rightarrow BE^2 = a^2 (5 + 4 \cos \alpha)$$

:  $\Delta ABE$  משפט הקוסינוסים ב-

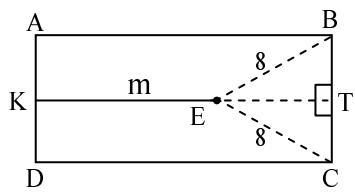
$$BA^2 = AE^2 + BE^2 - 2 \cdot AE \cdot BE \cdot \cos \beta$$

$$4a^2 = 5a^2 - 4a^2 \cos \alpha + 5a^2 + 4a^2 \cos \alpha -$$

$$- 2 \cdot a \sqrt{5 - 4 \cos \alpha} \cdot a \sqrt{5 + 4 \cos \alpha} \cdot \cos \beta$$

$$4 = 10 - 2\sqrt{(5 - 4 \cos \alpha)(5 + 4 \cos \alpha)} \cos \beta$$

$$3 = \sqrt{25 - 16 \cos^2 \alpha} \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{25 - 16 \cos^2 \alpha}}$$



(6) נתון:  $8 ס'מ$

.  $EK = m ס'מ$ ,  $EK \perp AD$

.  $AD = BC = b$ ,  $AB = DC = a$

הוא שווה-שוקיים, לכן הגובה לבסיס  $ET$  הוא גם

$$\text{תיכון לבסיס } (BT = TC = AK = KD = \frac{b}{2})$$

$$P = 2(DC + BC) = 2(a + b)$$

פונקציית המטרה:

**המשך בעמוד הבא**

$$\begin{aligned} EC^2 &= ET^2 + TC^2 && \text{לפי משפט פיתגורס ב- } \Delta ETC \\ 64 &= (a - m)^2 + \frac{b^2}{4} \\ b &= \sqrt{256 - 4(a - m)^2} = 2\sqrt{64 - (a - m)^2} \\ P(a) &= 2[a + 2\sqrt{64 - (a - m)^2}] \\ P'(a) = 0 &\Rightarrow 2 \cdot \left[ 1 + 2 \frac{-2(a - m)}{2\sqrt{64 - (a - m)^2}} \right] = 0 \\ 1 &= \frac{2(a - m)}{\sqrt{64 - (a - m)^2}} \Rightarrow \sqrt{64 - (a - m)^2} = 2(a - m) \\ 64 - (a - m)^2 &= 4(a - m)^2 \Rightarrow 5(a - m)^2 = 64 \\ a - m &= \pm \frac{8}{\sqrt{5}}, a > m \Rightarrow a - m = \frac{8}{\sqrt{5}} \Rightarrow a = m + \frac{8}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

a	$a < m + \frac{8}{\sqrt{5}}$	$a = m + \frac{8}{\sqrt{5}}$	$a > m + \frac{8}{\sqrt{5}}$
P'	+	0	-
P	↗	max	↘

$$P'(m) = 2\left(1 - \frac{0}{8}\right) > 0 \quad P'(m + 7) = 2\left(1 - \frac{2 \cdot 7}{\sqrt{15}}\right) < 0$$

.  $a = m + \frac{8}{\sqrt{5}}$  היקף המלבן מקסימלי כאשר

$$\begin{aligned} P_{\max} &= 2\left(m + \frac{8}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{64 - \frac{64}{5}}\right) = 2\left(m + \frac{8}{\sqrt{5}} + 2 \cdot \frac{16}{\sqrt{5}}\right) = \\ &= 2\left(m + \frac{8}{\sqrt{5}} + \frac{32}{\sqrt{5}}\right) = 2m + 2 \cdot \frac{40}{\sqrt{5}} = 2m + 2 \cdot \frac{40\sqrt{5}}{5} = 2m + 16\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$a = b \Rightarrow m + \frac{8\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{64 - \frac{64}{5}} \quad (\text{ב})$$

$$m + \frac{8\sqrt{5}}{5} = 2 \cdot \frac{16}{\sqrt{5}} \Rightarrow m + \frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{32\sqrt{5}}{5} \Rightarrow m = \frac{24\sqrt{5}}{5}$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 2a \cdot x^2}{x^2 - 4a^2} = \frac{x^2(x + 2a)}{(x - 2a)(x + 2a)}, \quad a > 0 \quad (7)$$

$x^2 - 4a^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4a^2 \Rightarrow x \neq \pm 2a$  (א) תחום הגדרה :

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 2a} \quad \text{אם } x \neq \pm 2a, \text{ אז :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{x^2}{x - 2a} = \left( \frac{4a^2}{0} \right) = \pm \infty \Rightarrow x = 2a \quad \text{אסימפטוטה אנכית :}$$

בנקודת  $x = -2a$  יש לפונקציה "חור".

אין אסימפטוטה אופקית, כי חזקת המונה גדולה מחזקת המכנה.

שיעור נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-  $y$  :

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$$

שיעור נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-  $x$  :

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x - 2a} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$$

שיעור נקודות הקיצון של הפונקציה :

$$\frac{2x(x - 2a) - x^2}{(x - 2a)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4ax - x^2 = 0 \Rightarrow x(x - 4a) = 0$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow (0,0)$$

$$x_2 = 4a \Rightarrow y_2 = \frac{16a^2}{2a} = 8a \Rightarrow (4a, 8a)$$

$x$	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2a$	$x = 2a$
$f'(x)$	+	0	-	נקודות אי-הגדרה
$f(x)$	↗	max	↘	

$x$	$2a < x < 4a$	$x = 4a$	$x > 4a$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

המשך בעמוד הבא ▶▶

$$f'(-a) = \frac{-a \cdot (-5a)}{(+)} = \frac{5a^2}{(+)} > 0 \quad f'(a) = \frac{a \cdot (-3a)}{(+)} < 0$$

$$f'(3a) = \frac{3a \cdot (-a)}{(+)} < 0 \quad f'(5a) = \frac{5a \cdot a}{(+)} > 0$$

כלומר:  $\min(4a, 8a)$ ,  $\max(0, 0)$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \left[ \frac{x^2 - 4ax}{(x-2a)^2} \right]' = 0 \quad \text{מציאת שיעורי נקודות פיתול:}$$

$$\frac{(2x-4a)(x-2a)^2 - 2(x-2a)(x^2-4ax)}{(x-2a)^4} = 0$$

$$(x-2a)[(2x-4a)(x-2a) - 2(x^2-4ax)] = 0$$

$$(x-2a)(2x^2-8ax+8a^2-2x^2+8ax) = 0$$

$$8a^2(x-2a) = 0 \Rightarrow x-2a = 0 \Rightarrow x = 2a$$

$x = 2a$  אינו שיך בתחום ההגדרה, לכן לגרף אין נקודות פיתול.

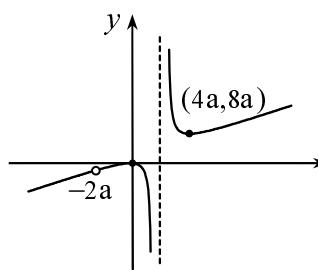
$x$	$x < 2a$	$x = 2a$	$x > 2a$
$f''$	-		+
$f$	$\cap$		$\cup$

$$f''(0) = \frac{-2a \cdot (+)}{(+)} < 0 \quad f''(3a) = \frac{(+ \cdot a)}{(+)} > 0$$

הגרף קעור כלפי מעלה עבור  $x > 2a$

הגרף קעור כלפי מטה עבור  $x < 2a$

(ב) ראו סרטוט ממשمال.



(8) (א) נסמן את נקודות ההשקה ב- A .

נסמן את שיעור ה- x של נקודות ההשקה ב- t , כלומר  $x_A = t$  , וואז :

$$y_A = f(t) = t\sqrt{t} + 4$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \Rightarrow m_A = f'(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t}$$

את השיפוע ניתן למצוא גם לפי שיפוע הישר העובר דרך שתי נקודות :

$$m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{t\sqrt{t} + 4 - 0}{t - 0} = \sqrt{t} + \frac{4}{t}$$

$$m_A = m_{OA} \Rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{t} = \sqrt{t} + \frac{4}{t} \Rightarrow t\sqrt{t} = 8 \Rightarrow t^{\frac{3}{2}} = 8$$

$$t = 8^{\frac{2}{3}} = 4 \Rightarrow x_A = 4 \Rightarrow y_A = 4\sqrt{4} + 4 = 12$$

$$m_A = \frac{3}{2}\sqrt{4} = 3$$

כלומר : A(4,12) ,  $m_A = 3$ 

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A :

$$y - 12 = 3(x - 4) \Rightarrow y = 3x$$

(ב) נמציא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה והמשיק :

$$\begin{cases} y = x\sqrt{x} + 4 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow x\sqrt{x} + 4 = 3x$$

$$a^2 \cdot a + 4 = 3a^2 \Rightarrow a^3 - 3a^2 + 4 = 0 \quad \text{נסמן : } \sqrt{x} = a \quad \text{ואז :}$$

אחת הנקודות המשותפות היא הנקודה A(4,12) , כלומר :

$$x = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\begin{array}{r} \text{לכן הביטוי } (a-2) a^3 - 3a^2 + 4 \text{ מתחלק בביטוי} \\ \hline \begin{array}{r} \overline{a^2 - a - 2} \\ \overline{a^3 - 3a^2 + 4} \\ - a^3 - 2a^2 \\ \hline - a^2 + 4 \\ - a^2 + 2a \\ \hline - 2a + 4 \\ - 2a + 4 \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$

המשך בעמוד הבא &lt;&lt;

$$a^3 - 3a^2 + 4 = 0 \Rightarrow (a-2)(a^2 - a - 2) = 0$$

$$(a-2)(a-2)(a+1) = 0$$

$$a_{1,2} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$a_3 = -1 \Rightarrow \sqrt{x} = -1 \Rightarrow \phi$$

כלומר, גраф הפונקציה ולמשיק יש נקודת משותפת אחת בלבד, והיא נקודת ההשקה.

נבדוק את המצב החדי בין גраф הפונקציה והמשיק :

$$f(2) = 2\sqrt{2} + 4, \quad y(2) = 3 \cdot 2 = 6$$

$$2\sqrt{2} + 4 > 6 \Rightarrow f(2) > y(2)$$

כלומר המשיק נמצא מתחת לגרף הפונקציה.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 (x\sqrt{x} + 4 - 3x) dx = \left( \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + 4x - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = \\ &= \frac{2 \cdot 4^2 \cdot \sqrt{4}}{5} + 4 \cdot 4 - \frac{3 \cdot 4^2}{2} - 0 = 12.8 + 16 - 24 = 4.8 \end{aligned}$$



טלפון: 04-8200929

**ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה**

❖ לכל ה大雨ות ❖ לכל השאלונים ❖ לכל הרמות