פתרון מבחן מס' 21 (ספר מבחנים – שאלון 035806)

(1) יום ראשון:

נסיעה מ- A ל- B: $t_1 = \frac{300}{V}$ שעות

נסיעה מ- B ל- A: $t_2 = \frac{300}{V+U}$ שעות

מהירות ממוצעת: $V_{N_1} = \dfrac{300+300}{\frac{300}{V}+\frac{300}{V+U}} = \dfrac{2V(V+U)}{2V+U}$ קמ"ש

יום שני:

נסיעה מ- A ל- B: $T_1 = \frac{300}{V}$ שעות

נסיעה מ- B ל- A: $T_2 = \frac{300}{V-U}$ שעות

מהירות ממוצעת: $V_{N_2} = \dfrac{300+300}{\frac{300}{V}+\frac{300}{V-U}} = \dfrac{2V(V-U)}{2V-U}$ קמ"ש

על סמך הנתונים, נקבל את המשוואות:

$$\begin{cases} ① \quad \dfrac{2V(V+U)}{2V+U} = 60 \\ ② \quad \dfrac{2V(V-U)}{2V-U} = \dfrac{100}{3} \\ ③ \quad V > U \end{cases}$$

נחלק אגפים מתאימים של משוואות ① ו- ② ונקבל:

$$\frac{2V(V+U)}{2V+U} \cdot \frac{2V-U}{2V(V-U)} = \frac{60 \cdot 3}{100} \quad \Rightarrow \quad \frac{2V^2+UV-U^2}{2V^2-UV-U^2} = \frac{9}{5}$$

$$8V^2 - 14UV - 4U^2 = 0 \quad /:2 \quad \Rightarrow \quad 4V^2 - 7UV - 2U^2 = 0$$

$$V_{1,2} = \frac{7U \pm \sqrt{49U^2+32U^2}}{8} = \frac{7U \pm 9U}{8} \quad \Rightarrow \quad V_1 = 2U \ , \ V_2 = -\frac{1}{4}U$$

הפתרון $V_2 = -\frac{1}{4}U$ נפסל, כי מהירות היא גודל חיובי.

נציב במשוואה ① את הפתרון $V_1 = 2U$ ונקבל:

$$\frac{2 \cdot 2U(2U+U)}{2 \cdot 2U+U} = 60 \quad \Rightarrow \quad \frac{12U^2}{5U} = 60 \quad \Rightarrow \quad U = 25 \text{ קמ"ש}$$

$$V = 2 \cdot 25 = 50 \text{ קמ"ש}$$

(2) (א) נוכיח כי $a_{n+2}-a_n=\text{const}$:

$$a_{n+2}=4(n+1)-a_{n+1}=4(n+1)-(4n-a_n)=4n+4-4n+a_n$$

$$a_{n+2}=a_n+4 \quad\Rightarrow\quad a_{n+2}-a_n=4=\text{const}$$

כלומר האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים מהווים סדרה חשבונית

שבה $A_1=a_1=k$ והפרשה 4,

וגם האיברים העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה חשבונית

שבה $A_1=a_2=4\cdot 1-a_1=4-k$ והפרשה 4.

(ב) $n=2m$, כלומר ישנם m איברים במקומות האי-זוגיים

ו- m איברים במקומות הזוגיים. לכן :

$$S_{2m}=S_m^{\text{אי-זוגיים}}+S_m^{\text{זוגיים}}=$$

$$=[2\cdot k+4(m-1)]\cdot\frac{m}{2}+[2\cdot(4-k)+4(m-1)]\cdot\frac{m}{2}=$$

$$=\frac{m}{2}(2k+4m-4+4-2k+4m)=4m^2=(2m)^2=n^2$$

(ג) $n=2m-1$, לכן :

$$S_{2m-1}=\underbrace{a_1+a_2+...+a_{2m-1}+a_{2m}}_{S_{2m}\text{ מסעיף ב'}}-a_{2m}$$

$$S_{2m-1}=(n+1)^2-a_{2m}=(n+1)^2-a_{n+1}$$

$a_{n+1}=a_{2m}$, כלומר האיבר ה- m -י בסדרת האיברים העומדים

במקומות הזוגיים הוא :

$$a_{2m}=4-k+4(m-1)=4m-k=$$

$$=4\cdot\frac{n+1}{2}-k=2n+2-k$$

מכאן :

$$S_{2m-1}=S_n=(n+1)^2-(2n+2-k)=$$

$$=n^2+2n+1-2n-2+k=n^2-1+k$$

(ג) 11 הוא מספר אי-זוגי, לכן נשתמש בתוצאה של סעיף (ג) :

$$S=n^2-1+k \quad\Rightarrow\quad 11^2-1+k=100 \quad\Rightarrow\quad k=-20$$

(3) (א)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(A\cap B)=1$$

$$\begin{cases}P(A)+P(B)=1\\ P(A)-P(B)=0.3\end{cases}$$

נקבל: $P(A)=\frac{1+0.3}{2}=0.65\ ,\ P(B)=1-P(A)=0.35$

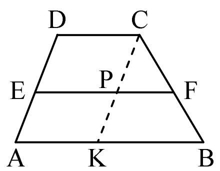
מכאן: $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.35=0.65$

(ב) (*i*)

$$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0.35-[P(A)-P(C)]=$$
$$=0.35-(0.65-0.4)=0.35-0.25=0.1$$

(*ii*)

$$P(\overline{A}\cup B)=1-P(A)+P(A\cap B)=1-0.65+0.25=0.6$$



(4) נעביר $CK \parallel DA$.

CK חותך את EF בנקודה P .

$AKCD$, $DCPE$ מקבילית (מרובע בעל שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות)

$\Downarrow$

3 ס״מ $DC=EP=AK=$ (במקבילית צלעות נגדיות שוות זו לזו)

$\Downarrow$

3 ס״מ $PF=EF-EP=6-3=$ (חיסור קטעים, הצבה)

5 ס״מ $KB=AB-AK=8-3=$ (חיסור קטעים, הצבה)

$PF \parallel KB$

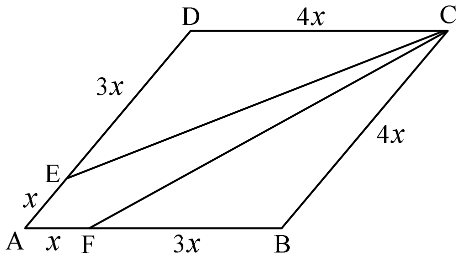
$\Downarrow$

$\Delta CPF \sim \Delta CKB$ (לפי משפט דמיון ז.ז.)

$\Downarrow$

$$\frac{h_{\Delta CPF}}{h_{PFBK}}=\frac{h_{\Delta CPF}}{h_{CKB}-h_{CPF}}=\frac{3}{5-3}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}}=\frac{\frac{AB+EF}{2}\cdot h_{PFBK}}{\frac{EF+DC}{2}\cdot h_{CPK}}=\frac{(8+6)\cdot h_{PFBK}}{(6+3)\cdot h_{CPK}}=\frac{14}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{28}{27}$$



(5) (א) נסמן: $AF = AE = x$,

מכאן: $DE = FB = 3x$

ו- $AB = BC = CD = AD = 4x$.

נסמן: $\measuredangle FCB = \alpha$.

$\measuredangle B = 180^\circ - \measuredangle DCB = 135^\circ$ (סכום זוויות חד-צדדיות בין מקבילים שווה ל- 180°)

$\measuredangle CFB = 180^\circ - 135^\circ - \alpha = 45^\circ - \alpha$ (סכום זוויות ב- ΔBCF שווה ל- 180°)

לפי משפט הסינוסים ב- ΔBCF :

$$\frac{BC}{\sin \measuredangle F} = \frac{FB}{\sin \measuredangle C} \quad \Rightarrow \quad \frac{4x}{\sin(45^\circ - \alpha)} = \frac{3x}{\sin \alpha}$$

$$4\sin\alpha = 3\sin(45^\circ - \alpha) \;\Rightarrow\; 4\sin\alpha = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)$$

$$4\sqrt{2}\sin\alpha = 3\cos\alpha - 3\sin\alpha \;\Rightarrow\; \sin\alpha\cdot(4\sqrt{2}+3) = 3\cos\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{3}{4\sqrt{2}+3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 19.11^\circ$$

(לא מתייחסים למחזור של פונקציית tan כי מדובר בזוויות קטנות מ- 180°).

(ב) לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔBCF :

$$CF^2 = BF^2 + BC^2 - 2\cdot BC\cdot BF\cdot \cos\measuredangle B$$

$$CF^2 = 9x^2 + 16x^2 - 24x^2\cos 135^\circ = 25x^2 - 12\sqrt{2}x^2 \approx 41.97x^2$$

$$CF = \sqrt{41.97x^2} \approx 6.47847x = CE$$

$$P_{AECF} = 2\cdot(x + 6.47847x) = 14.95694x$$

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔABC :

$$AC^2 = (4x)^2 + (4x)^2 - 2\cdot 4x\cdot 4x\cdot\cos 135^\circ$$

$$a^2 = 32x^2 + 32x^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad a^2 \approx 54.627x^2 \quad \Rightarrow \quad x \approx 0.1353a$$

$$P_{AECF} = 14.95694\cdot 0.1353a = 2.02a$$

(6)

$$y=\int_{-2}^{2}(2x^3+3a^2x^2+a)\,dx=\left(\frac{x^4}{2}+a^2x^3+ax\right)\Big|_{-2}^{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(16-16)+a^2\cdot(8+8)+a\cdot(2+2)=16a^2+4a$$

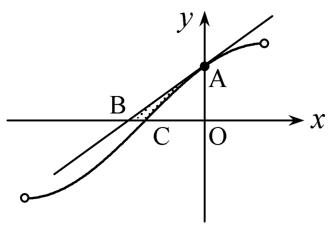
הגרף של הפונקציה $y=16a^2+4a$ הוא פרבולה בעלת מינימום:

$$x_{min}=x_{\text{קדקוד}}=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot16}=-\frac{1}{8}$$

$$y_{min}=y_{\text{קדקוד}}=16\cdot\frac{1}{64}-4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

$$y\ge y_{min}\quad\Rightarrow\quad y\ge-\frac{1}{4}$$

(7) נמצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A:



$$f'(x)=2\cdot\frac{-\sin x\sqrt{1-\sin x}-\frac{-\cos x\cdot\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}}}{(1-\sin x)}=$$

$$=2\cdot\frac{-2\sin x\,(1-\sin x)+\cos^2 x}{2\,(1-\sin x)\sqrt{1-\sin x}}=$$

$$=\frac{-4\sin x+4\sin^2 x+2\cos^2 x}{2\,(1-\sin x)\sqrt{1-\sin x}}$$

$$f'(0)=\frac{-4\cdot0+4\cdot0^2+2\cdot1^2}{2\,(1-0)\sqrt{1-0}}=1\quad,\quad f(0)=\frac{2\cdot1}{\sqrt{1-0}}=2$$

$$y-2=1\cdot(x-0)\quad\Rightarrow\quad y=x+2$$

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x (הנקודה B):

$$y=0\quad\Rightarrow\quad x+2=0\quad\Rightarrow\quad x=-2\quad\Rightarrow\quad B(-2,0)$$

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x (הנקודה C):

$$f(x)=0\quad\Rightarrow\quad\frac{2\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}=0\quad\Rightarrow\quad2\cos x=0\quad\Rightarrow\quad\cos x=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n\ ,\ n\in\mathbb{Z}$$

בתחום הנתון:

$$x=x_B=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}$$

המשך בעמוד הבא >>>

$$S_{\text{מבוקש}} = S_{\Delta\,ABO} - S_{\text{מתחת הגרף}} = \frac{|OB|\cdot|OA|}{2} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{2\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,dx =$$

$$= \frac{2\cdot 2}{2} + \left(4\sqrt{1-\sin x}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= 2 + 4\left(\sqrt{1-0} - \sqrt{1+1}\right) = (6-4\sqrt{2})$$ יחידות שטח

(8) (א) תחום הגדרה:

$$\begin{cases} x + a \ge 0 \\ x^2 \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -a \\ x \ne 0 \end{cases} \Rightarrow -a \le x < 0 \ ,\ x > 0$$

(ב) אסימפטוטה אנכית:

$$\lim_{x\to 0}\left(3 + \frac{\sqrt{x+a}}{x^2}\right) = \left(3 + \frac{\sqrt{a}}{0}\right) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

אסימפטוטה אופקית ימנית:

$$\lim_{x\to \infty}\left(3 + \frac{\sqrt{x+a}}{x^2}\right) = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

אין צורך לבדוק אסימפטוטה שמאלית, כי $x \ge -a$ ולא יכול לשאוף ל- $-\infty$.

(ג) + (ד)

$$f'(x) = \frac{\frac{x^2}{2\sqrt{x+a}} - 2x\sqrt{x+a}}{x^4} = \frac{x^2 - 4x^2 - 4ax}{2x^4\sqrt{x+a}} = \frac{-3x^2 - 4a}{2x^3\sqrt{x+a}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-3x^2 - 4a}{2x^3\sqrt{x+a}} = 0$$

x	$-a < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	נקודת אי-הגדרה	−
$f(x)$	↗		↘

$$f'\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{\frac{3a}{4} - 4a}{-2\cdot\frac{a^3}{8}\cdot(+)} > 0 \ ,\ f'(a) = \frac{-3a - 4a}{2a^3\cdot(+)} < 0$$

מכיוון ש- $a > 0$, הרי ש- $-3x^2 - 4a < 0$ ולכן אין אף נקודה בתחום ההגדרה שבה הנגזרת מתאפסת.

נקודות קצה:

$$f(-a) = 3 + \frac{0}{a^2} = 3$$

לכן, בנקודת הקצה $(-a,3)$ לגרף הפונקציה יש נקודת מינימום.

תחום ירידה: $x > 0$, תחום עלייה: $-a < x < 0$.

(ה) ראו סרטוט בפתרון השאלה בספר הבחינות, עמוד 205.

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות